

1975

# Квант

4

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*





Цветные «следы» на пластинке получены так: из центра вращающегося диска над пластинкой по прямой линии двигали тюбик с вытекающей из него краской. А пластинка крутилась. Два «следа» получились

при вращении на 78 оборотов, а один — на 33 оборота. Какой из трех? Чтобы проверить себя и ответить на вопрос этот совершенно уверенно, прочитайте статью Я. А. Смородинского «Сила Корнолиса» (см. с. 2).

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

Главный редактор  
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,  
С. Т. Беляев,  
В. Г. Болтянский,  
Н. Б. Васильев,  
Ю. Н. Ефремов,  
В. Г. Зубов,  
П. Л. Капица,  
В. А. Кириллин.

главный художник  
А. И. Климанов,  
С. М. Козел,

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,  
Л. Г. Макар-Лиманов  
А. И. Маркушевич,  
Н. А. Патрикеева,  
И. С. Петраков,  
Н. Х. Розов,  
А. П. Савин,  
И. Ш. Слободецкий,

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант,  
А. Т. Цветков,  
М. П. Шаскольская,  
С. И. Шварцбург,  
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,  
А. Н. Виленкин,  
И. Н. Клумова,  
художественный редактор  
Т. М. Макарова,  
Н. А. Минц,  
Т. С. Петрова,  
В. А. Тихомирова,  
зам. редакцией  
Л. В. Чернова

## В НОМЕРЕ:

- 2 Я. А. Смородинский. Сила Корколиса  
9 И. Н. Бронштейн. Парабола  
17 В. Н. Ланге. Зачем топят печи?
- Лаборатория «Кванта»**  
19 М. И. Емельянов, А. М. Жарков, В. М. Загайнов,  
В. С. Маточкин. Суточное вращение Земли
- Математический кружок**  
21 А. П. Винниченко. Квадратичный треугольник и  
непрерывные цепочки
- Задачник «Кванта»**  
25 Задачи М316—М320; Ф328—Ф332  
27 Решения задач М280—М285; Ф291—Ф295
- Практикум абитуранта**  
37 С. Т. Берколайко. Использование неравенства Коши при  
решении задач  
41 Г. Я. Мякишев. Электростатическое поле  
48 Г. В. Меледин, А. И. Ширшов. Новосибирский  
государственный университет
- Рецензии, библиография**  
52 Д. Бородин. Школьникам о современной физике
- «Квант» для младших школьников**  
53 Задачи  
54 Е. Я. Гук. Математические игры на шахматной доске
- Ответы, указания, решения**  
60 Смесь (с. 18, 24, 47)

На первой странице обложки вы видите известный фонтан «Дружба народов» (Москва, ВДНХ). Струи бьющей воды имеют весьма характерную форму — форму параболы. Об этой кривой и некоторых ее свойствах вы можете прочесть в статье «Парабола» (с. 9). Обратите внимание на то, что по сравнению с этой фотографией параболы в статье изображены «низ головой», но пусть это вас не смущает: интересна сама кривая, и не ее расположение.

Фото Д. И. Германа.

© Главная редакция физико-математической литературы  
издательства «Наука». «Квант», 1975 год



# СИЛА КОРИОЛИСА

Я. А. Смородинский

## Знаете ли вы?

Какую кривую вычерчивает на плоскости маятник Фуко? В какую сторону отклоняется брошенный с поверхности Земли вертикально вверх камень? Может ли снаряд лететь строго по меридиану?

Можете ли вы ответить на эти вопросы? У всех этих задач есть общая черта: их все удобнее решать в неинерциальных системах отсчета\*), точнее, в системах отсчета, вращающихся с постоянной угловой скоростью. Можно, конечно, рассматривать все явления в какой-то инерциальной системе, такой, например, как система далекой звезды или даже Солнца (неравномерностью движения которого относительно далекой звезды можно пренебречь). Хотя такой путь совершенно правильный и, следуя ему, мы не покинем твердой почвы законов Ньютона, тем не менее, часто бывает удобнее (и даже нагляднее) рассматривать явление с точки зрения наблюдателя, находящегося во вращающейся системе отсчета.

## Неинерциальные системы отсчета

Одно и то же движение выглядит по-разному, если его наблюдать из разных систем отсчета. Посмотрим,

\*) О неинерциальных системах отсчета было рассказано в статье Я. А. Смородинского «Силы инерции», «Квант», 1974, № 8.

например, на движение снаряда, который был выпущен из пушки, стоящей на северном полюсе. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то траектория снаряда лежала бы в плоскости меридиана. Такую картину видели бы как наблюдатель, находящийся на Земле, так и наблюдатель, неподвижно закрепленный вне Земли.

Однако Земля вращается! С точки зрения неподвижного наблюдателя (находящегося вне Земли) Земля вращается против часовой стрелки (если смотреть сверху на ее северный полюс), поэтому плоскость фиксированного меридиана поворачивается вместе с Землей с запада на восток, а плоскость движения снаряда в пространстве остается неизменной.

Наблюдатель, находящийся на Земле (подвижный наблюдатель), видит неподвижную плоскость меридиана и летящий снаряд, который отклоняется от этой плоскости на запад. С любой точки зрения плоскость движения снаряда не совпадает с плоскостью начального меридиана, только один наблюдатель приписывает это несовпадение движению Земли, а другой — движению самого снаряда.

Земной наблюдатель (например, артиллерист) знает, конечно, что причиной «отклонения» на самом деле является вращение Земли. Однако для практических вычислений часто бывает удобнее считать, что боковое отклонение снаряда вызвано некоторой силой, которая действует только

в неинерциальной системе отсчета. Такие силы называют силами инерции. От обычных сил они отличаются тем, что они не являются результатом взаимодействия каких-то двух тел.

Во вращающейся системе отсчета действуют силы инерции двух типов: центробежная сила инерции, которая зависит только от расстояния до оси вращения, и сила Кориолиса, зависящая только от скорости тела (материальной точки) относительно вращающейся системы отсчета. О первой силе было подробно рассказано в статье «Силы инерции». Напомним основные ее свойства.

### Центробежная сила инерции

Почему у мальчика, который катается на карусели, при увеличении скорости вращения слетает шапка? На этот вопрос можно ответить по-разному. С точки зрения неподвижного наблюдателя, стоящего около карусели, объяснение будет таким. Пока скорость вращения была небольшой, шапку удерживала на голове мальчика сила трения, которая и сообщала шапке необходимое центростремительное ускорение. С увеличением угловой скорости вращения карусели центростремительное ускорение должно увеличиваться, а сила трения покоя может расти только до определенного предела. Поэтому в какой-то момент шапка теряет связь с головой мальчика, она движется по инерции равномерно и прямолинейно, а карусель вместе с мальчиком уходит от шапки.

Подвижный наблюдатель, связанный с каруселью, скажет, что кроме силы трения на шапку действует еще центробежная сила инерции, равная по абсолютной величине

$$F_{\text{и.ц}} = m\omega^2 r,$$

где  $m$  — масса шапки,  $\omega$  — угловая скорость вращения карусели, а  $r$  — расстояние до оси вращения. Центробежная сила инерции лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения,

и направлена по радиусу в сторону от центра. Выражение для  $F_{\text{и.ц}}$  можно записать в векторной форме:

$$F_{\text{и.ц}} = m\omega^2 \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор рассматриваемого тела, он лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Если центробежная сила инерции превышает по величине силу трения шапки о голову мальчика, шапка улетит.

### Сила Кориолиса

Сложнее обстоит дело, если материальная точка движется во вращающейся системе координат. В этом случае кроме центробежной силы инерции на точку действует еще одна сила, зависящая от скорости движения точки относительно вращающейся системы координат. Она называется силой Кориолиса \*).

Силу Кориолиса мы сможем определить, если рассмотрим два частных случая:

- 1) скорость материальной точки направлена перпендикулярно к ее радиусу-вектору во вращающейся системе отсчета;
- 2) скорость точки направлена вдоль этого радиуса.

### Вращающийся стул

Представьте себе, что вы сидите на стуле, который вращается вокруг своей оси. С вашей точки зрения все предметы вокруг совершают равномерное круговое движение, подобно тому, как в картине мироздания древних весь небосвод поворачивался за сутки на один оборот вокруг Земли. Но уже древние понимали, что звезды должны быть накрепко прикреплены к небесным сферам — иначе они разлетятся. Почему же мебель и сами

\*) Гюстав Гаспар Кориолис (1792—1843) — французский механик. Кроме теории, о которой идет речь в этой статье, известен математической теорией бильярдной игры, в которой он рассмотрел законы движения шара на плоскости под действием удара.

стены комнаты не разлетаются от вас под действием центробежной силы инерции?

Ответ может быть только такой, что во вращающейся системе отсчета существует другая сила, которая не только компенсирует центробежную силу инерции, направленную наружу, но и сообщает телу центростремительное ускорение, направленное к оси вращения. Такую роль и выполняет сила Кориолиса:

$$F_K + F_{и.ц} = -m\omega^2 r.$$

Отсюда мы можем вычислить силу Кориолиса; она должна быть равна в этом случае

$$F_K = -2 F_{и.ц}.$$

то есть

$$F_K = -2m\omega^2 r.$$

Исключим  $r$  из выражения для величины силы Кориолиса. Линейная скорость точки, находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения, равна  $\omega r$ , а потому можно написать, что

$$F_K = -2m\omega v_{кас}$$

(знак минус по-прежнему означает, что сила Кориолиса в нашем случае направлена к оси вращения).

Таким образом, действие силы  $F_K$  во вращающейся системе приводит к тому, что, сидя на вращающемся стуле, вы видите комнату хотя и вращающейся вокруг вас, но такой же целой, как ее видит неподвижный наблюдатель.

### Шарик на вращающемся диске

Пусть в центре диска находится шарик, который может скользить по диску абсолютно без трения. В некоторый момент времени шарику сообщается скорость  $v_{рад}$ , направленная вдоль одного из радиусов. Как будут описывать характер движения шарика два наблюдателя — неподвижный и подвижный, вращающийся на диске?

Очевидно, что для неподвижного наблюдателя шарик на диске движется с постоянной скоростью  $v_{рад}$  по прямой линии. Расстояние, которое

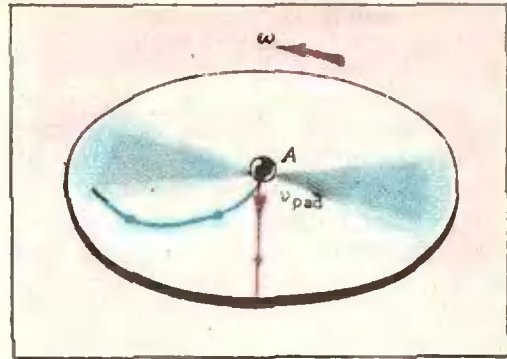


Рис. 1.

проходит шарик по диску от его центра к моменту времени  $t$ , равно  $v_{рад}t$ .

След, который оставляет шарик на вращающемся диске, представляет траекторию шарика с точки зрения подвижного наблюдателя, находящегося на диске. Для этого наблюдателя шарик движется не прямолинейно, а описывает некоторую кривую линию (см. рис. 1). Но это означает, что шарик движется с ускорением. Следовательно, во вращающейся системе появляется сила, которая и сообщает это ускорение. Определим, чему равна эта сила в самом начале движения шарика.

За малый промежуток времени  $\Delta t$  от начала движения шарик, перемещаясь вдоль красной линии (см. рис. 1), удаляется от центра диска на расстояние  $\Delta l = v_{рад}\Delta t$ . За это же время диск поворачивается на угол  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения диска). Та точка диска, которая оказывается под шариком на расстоянии  $\Delta l$  от центра диска, за время  $\Delta t$  прошла расстояние  $\Delta s = \Delta l\Delta\varphi = v_{рад}\omega\Delta t^2$ . Конечно, все точки вращающегося диска движутся по окружностям, но мы рассматриваем столь малый промежуток времени  $\Delta t$ , что можно считать движение точек, близких к центру диска, прямолинейным. Тогда  $\Delta s$  есть перемещение точки, которая в начальный момент времени находилась на расстоянии  $\Delta l$  от центра, в направлении, перпендикулярном красной линии. Для наблюдателя, находящегося на

диске, шарик за время  $\Delta t$  перемещается в противоположном направлении на то же самое расстояние  $\Delta s = v_{\text{рад}} \omega \Delta t^2$  и при этом перемещается равномерно вдоль радиуса. Сравнив выражение для  $\Delta s$  с формулой для пути при равномерном движении —  $s = \frac{at^2}{2}$ ,

мы замечаем, что в нашем примере для подвижного наблюдателя в течение промежутка времени  $\Delta t$  движение шарика в направлении, перпендикулярном вектору скорости  $v_{\text{рад}}$ , будет равноускоренным с ускорением

$$a = 2v_{\text{рад}} \omega.$$

Следовательно, во вращающейся системе именно в этом направлении и действует на шарик массы  $m$  сила

$$F_{\text{К}} = 2m v_{\text{рад}} \omega.$$

Это опять сила Кориолиса, но теперь она направлена перпендикулярно радиусу.

### Конец вывода формулы

Мы рассмотрели два случая движения тела относительно вращающейся системы отсчета. В первом примере («вращающаяся» комната) тело двигалось в неинерциальной системе по окружности, в любой момент скорость тела была направлена по касательной к этой окружности. Как мы видели, при этом на тело действует сила Кориолиса, которая направлена вдоль радиуса окружности, то есть перпендикулярно вектору скорости.

Во втором примере (шарик на диске) мы показали, что если в некоторый момент времени скорость тела направлена вдоль радиуса, то в этот момент на тело действует сила Кориолиса, направленная перпендикулярно радиусу, то есть перпендикулярно скорости тела. Абсолютная величина силы Кориолиса в обоих случаях была прямо пропорциональна произведению  $v\omega$ , где  $v$  — абсолютная величина скорости тела относительно вращающейся системы в данный момент времени, а  $\omega$  — величина угловой скорости вращающейся системы относительно инерциальной.

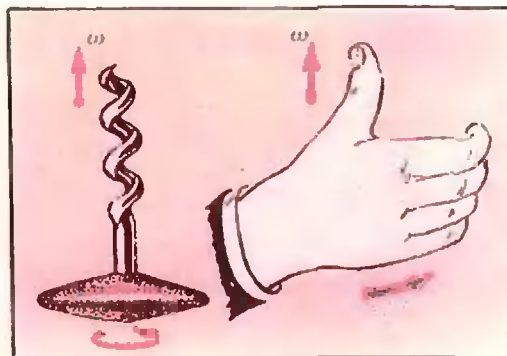


Рис. 2.

А какова будет сила Кориолиса, действующая на тело, мгновенная скорость которого во вращающейся системе отсчета направлена произвольным образом? Нетрудно показать, что величина силы Кориолиса и в этом общем случае будет пропорциональна произведению  $|v|$  на величину угловой скорости системы (для этого надо только разложить вектор скорости на две компоненты, одну из которых направить вдоль радиуса, а другую — перпендикулярно к нему по касательной).

Теперь надо еще определить направление силы Кориолиса. Для этого, прежде всего, заметим, что угловую скорость можно задать в виде вектора. Вектор  $\omega$  параллелен оси вращения. Направление этого вектора связывается с направлением вращения системы с помощью правила буравчика (или винта): если вращать рукоятку буравчика так, как вращается система, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора угловой скорости. Можно пользоваться и другим правилом — правилом правой руки: если согнуть четыре пальца правой руки по направлению вращения системы, то отогнутый большой палец укажет направление вектора  $\omega$  (см. рисунок 2).

Если в нашем первом примере система отсчета вращалась против часовой стрелки, то векторы  $\omega$ ,  $v$  и  $F_{\text{К}}$  располагались так, как показано на рисунке 3. Во втором примере эти

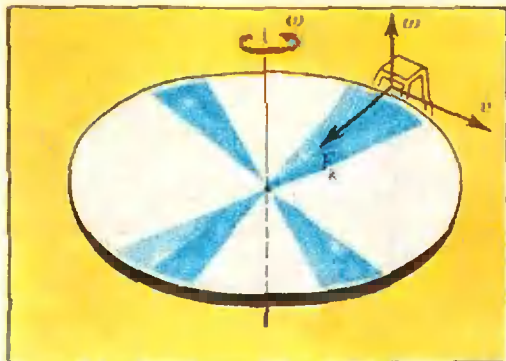


Рис. 3.

векторы располагались так, как на рисунке 4. Из этих рисунков видно, что сила Кориолиса в обоих случаях перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы  $\omega$  и  $v$ . Говорят, что векторы  $F_K$ ,  $v$  и  $\omega$  (именно в этой последовательности) образуют правую систему векторов (правая рука поэтому и изображена на рисунке 2).

### Векторное произведение

Мы видим, что сила Кориолиса зависит от двух векторных величин — от скорости  $v$  движения материальной точки относительно вращающейся системы координат и от угловой скорости  $\omega$  самой системы отсчета. Величина этой силы пропорциональна произведению величин скорости точки и угловой скорости системы, а ее направление однозначно определяется направлениями векторов  $v$  и  $\omega$ .

Формулу для кориолисовой силы в современных книжках пишут так:

$$F_K = 2m v \times \omega,$$

где  $\times$  — знак так называемого векторного произведения двух векторов.

Векторным произведением двух перпендикулярных друг к другу векторов  $A$  и  $B$  называется третий вектор  $C$ , который строится следующим образом (рис. 5). Его величина численно равна площади прямоугольника, построенного на векторах  $A$  и  $B$ , то есть  $|C| = |A| \cdot |B|$ . Направление вектора  $C$  перпендикулярно к плоскости указанного прямоугольника и выбирается таким, чтобы векторы  $A$ ,  $B$  и  $C$  (в этом порядке) составляли правую систему векторов. По-другому, направление вектора  $C$  можно определить по правилу буравчика (или правой руки): если поворачивать вектор  $A$  к вектору  $B$  и связать с этим вращением вращение рукоятки буравчика (или направление, в котором

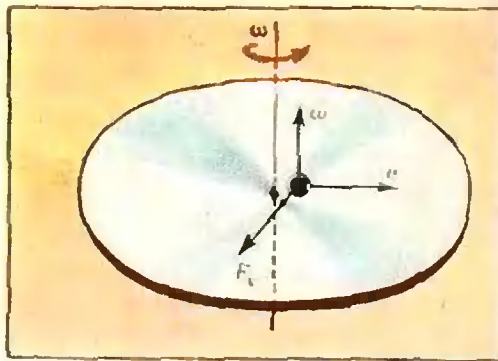


Рис. 4.

согнуты пальцы правой руки), то поступательное движение острия буравчика (или отогнутый большой палец) укажет направление вектора  $C$ .

### Маятник Фуко

В 1851 году французский ученый Леон Фуко (1810—1868) продемонстрировал фактически первое экспериментальное доказательство вращения Земли вокруг своей оси. Небольшой тяжелый шар подвешивался на длинной нити так, чтобы он мог свободно качаться в любом направлении. В некоторый момент этот маятник выводили из положения равновесия, он начинал колебаться. Если внимательно следить за плоскостью колебаний маятника, то оказывается, что она не остается постоянной для земного наблюдателя, а медленно поворачивается по часовой стрелке (если смотреть сверху).

Этот опыт, который теперь называют опытом Фуко, удивляет зрите-

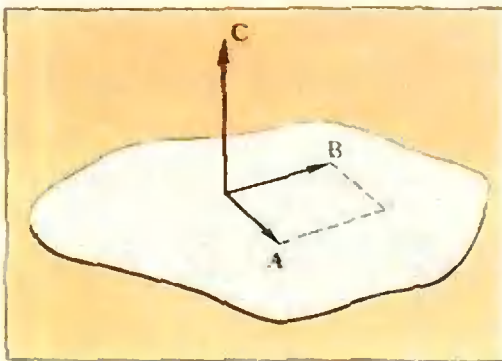


Рис. 5.



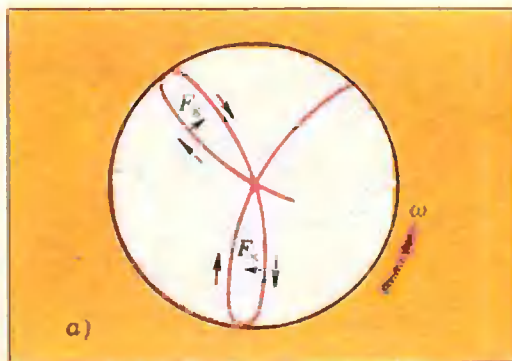
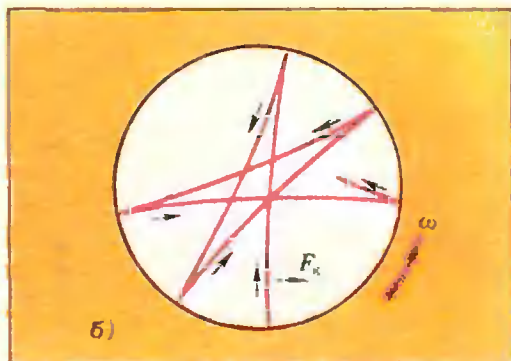


Рис. 6.

лей даже сейчас, а раньше на него смотрели как на чудо. Сейчас мы его очень легко можем объяснить. Пусть, для простоты рассуждений, маятник подвешен на полюсе. С точки зрения неподвижного наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, плоскость колебаний маятника, конечно, неподвижна, а Земля вращается против часовой стрелки. По той же причине след движения шарика на горизонтальной плоскости был не прямой линией, а сложной кривой (рис. 6).

Земной наблюдатель, связанный с вращающейся системой отсчета, объяснит поворот плоскости колебаний действием на шарик силы Кориолиса. При небольших отклонениях маятника от положения равновесия можно считать, что скорость шарика в любой момент перпендикулярна к угловой скорости  $\omega_3$  вращения Земли, поэтому кориолисова сила всегда лежит в горизонтальной плоскости и направлена перпендикулярно к скорости шарика вправо, если смотреть по направлению движения шарика. Эта сила и вызывает поворот плоскости колебаний маятника, причем угловая скорость поворота  $\omega$  как раз равна угловой скорости вращения Земли.

Нетрудно показать, что если маятник подвешен в месте, широта которого равна  $\varphi$ , то угловая скорость будет равна  $\omega_3 \sin \varphi$ , обращаясь в ноль на экваторе. Для этого достаточно найти проекцию  $\omega_3$  на нормаль к



плоскости горизонта (проведите доказательство до конца).

Картина качания маятника содержит интересные детали. Если мы попытаемся понять, какую же линию вычерчивает маятник Фуко на плоскости, то обнаружим, что форма траектории зависит от того, как маятник начал качаться.

Если маятник начал свое движение из положения покоя (вертикального положения на полюсе), то и при движении он всегда будет проходить через полюс и будет рисовать на плоскости кривую типа изображенной на рисунке 6, а.

Если в начальный момент маятник был максимально отклонен, то для инерциального наблюдателя он имел в этот момент отличную от нуля угловую скорость, и значит, для такого наблюдателя маятник качается не в одной плоскости, а выписывает на плоскости, перпендикулярной к плоскости колебаний, эллипс. Наблюдатель на Земле будет видеть траекторию, которую можно описать как поворачивающийся эллипс (рис. 6, б). Траектория теперь уже не проходит через полюс.

### Отклонение падающих тел

Когда в школе начинают изучать равноускоренное движение, то обязательно решают задачу о падении материальной точки с некоторой высоты  $H$ . Решение этой задачи простое. Если точка вначале покоилась, то зависимость пути  $h$ , пройденного точкой, от времени выражается формулой  $h = \frac{1}{2} g t^2$  ( $g$  — ускорение силы тяжести). Скорость у поверхности Земли равна  $v_0 = \sqrt{2gH}$ .

Если точка движется, напротив, вертикально вверх и имеет вначале

(на поверхности Земли) скорость  $v_0$ , то время ее полета вверх будет равно  $t = \sqrt{2H/g}$ , то есть времени падения тела в первой задаче.

При этом, однако, предполагается, что точка все время движется по прямой. Как вы теперь понимаете, такое предположение можно делать только, если не учитывать вращение Земли.

В действительности, с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета тело, брошенное с высоты  $H$ , имеет горизонтальную скорость  $\omega_3 (H + R) \cos \varphi$ , где  $R$  — радиус Земли,  $\omega_3$  — ее угловая скорость,  $\varphi$  — широта места. Падая, тело сохраняет эту скорость и в своем горизонтальном движении будет опережать покоящиеся (относительно Земли) точки (например, окна в доме, если тело падает с крыши) на высотах  $h < H$ , поскольку эти точки движутся с меньшей скоростью  $\omega_3 (h + R) \cos \varphi$ .

Попробуем сосчитать, на сколько падающее с высоты  $H$  тело отклонится от вертикали к востоку (Земля вращается с запада на восток, а тело обгоняет Землю). Эту задачу проще решить в системе отсчета, связанной с Землей, используя выражение для силы Кориолиса\*).

Итак, пусть тело падает с высоты  $H$ , где оно находилось в момент времени  $t=0$ . Тело будет двигаться равноускоренно, и его вертикальная компонента скорости с течением времени будет изменяться по закону

$$v = gt.$$

Для земного наблюдателя на тело будет действовать горизонтальная составляющая силы Кориолиса, которая будет увеличивать горизонтальную компоненту количества движения тела, отклоняя его к востоку. Запишем уравнение для этого движения:

$$ma = 2m\omega_3 v \cos \varphi,$$

или, учитывая зависимость скорости от времени,

$$a = 2\omega_3 \cos \varphi gt = At,$$

где  $A = 2\omega_3 g \cos \varphi$  — постоянная величина.

С таким уравнением вы в школе не встречались. Если бы  $a$  было постоянным, то движение было бы равноускоренным, но у нас ускорение растет линейно со временем. Как в этом случае выражается зависимость пути от времени? Такая задача легко решается, если уметь дифференциро-

вать. Мы попытаемся угадать (а потом проверить) ответ.

Сначала найдем выражение для скорости. В равноускоренном движении  $v = v_0 + at$  и  $a = \text{const}$ . Так как теперь  $a$  линейно зависит от времени, то разумно положить, что скорость от времени зависит квадратично:

$$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2.$$

Сосчитаем ускорение. Для этого найдем скорость в соседний момент времени  $t + \Delta t$  ( $\Delta t \ll t$ ):

$$v = v_0 + \alpha(t + \Delta t) + \beta(t + \Delta t)^2.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее и отбрасывая член с  $(\Delta t)^2$  ввиду его малости по сравнению с остальными членами, получим

$$a = \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \alpha + 2\beta t.$$

Теперь мы видим, что если  $a = At$ , то  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{A}{2}$ . Тогда (положив еще, что  $v = 0$  при  $t = 0$ , откуда  $v_0 = 0$ )

$$v = \frac{At^2}{2}.$$

Теперь мы можем найти и путь  $s$ . Предположим, что

$$s \approx s_0 + \alpha_1 t + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t^3.$$

Это выражение отличается на один лишний член  $\gamma_1 t^3$  от формулы для равноускоренного движения. Запишем пройденный путь к моменту времени  $t + \Delta t$  и составим, как и раньше, отношение

$$v = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \alpha_1 + 2\beta_1 t + 3\gamma_1 t^2$$

(здесь мы отбросили члены с  $(\Delta t)^2$  и  $(\Delta t)^3$ ). Сравнивая с предыдущим выражением для скорости и полагая еще  $s_0 = 0$ , найдем, что

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = \frac{1}{6} A$$

"

$$s = \frac{At^3}{6}.$$

Возвращаясь теперь к нашей задаче, мы можем выразить время  $t$  через конечную скорость  $v_0$  из закона для вертикальной скорости:  $t = \frac{v_0}{g}$ . Так как  $A = 2\omega_3 g \cos \varphi$ , то смещение падающего тела на восток оказывается равным

$$s = \frac{1}{3} \frac{\omega_3 \cos \varphi}{g^2} v_0^3.$$

Подставьте сами сюда соответствующие числа и вычислите  $s$ , если тело падает, например, с высоты 1 км. Несколько длиннее выглядят вычисления для тела, брошенного вверх с поверхности Земли. Это упражнение можете сделать сами.

\* ) Ее, конечно, можно решать и в инерциальной системе. Попробуйте это сделать.

# ПАРАБОЛА

И.Н. БРОНШТЕЙН



После двух «цариц школьной геометрии» — прямой линии и окружности — парабола, пожалуй, самая простая и в то же время самая важная линия. Обычно парабола не рассматривается на уроках геометрии, она встречается в школе только как график квадратного трехчлена, но эта кривая интересна сама по себе.

В этой статье мы используем некоторые факты и термины из статей «Эллипс» и «Гипербола», помещенных в «Кванте» № 1 и № 3 за этот год.

## I АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

### Вид параболы

Характерный облик параболы известен всем. Форму параболы принимает струя воды, бьющая из шланга, по параболе летит мяч или камень. Выражаясь языком механики, парабола — это траектория движения материальной точки, брошенной в наклонном или горизонтальном направлении и падающей под действием силы притяжения Земли \*).

На рисунке слева изображена не вся парабола, а только ее часть. Всю параболу изобразить невозможно — эта кривая имеет бесконечное протяжение, то есть не может уместиться на ограниченном куске плоскости. Опишем эту линию (рис. 1).

Парабола — плавная кривая, симметричная относительно прямой  $Y'Y$  (на рисунке 1 — вертикальной), пересекает ее в одной точке  $O$  (эта точка называется *вершиной* параболы) и расположена по одну сторону от перпендикуляра  $X'X$  к  $Y'Y$  (на рисунке — над  $X'X$ ). Луч  $OY$  прямой  $Y'Y$ , идущий в ту же сторону, называется *осью* параболы. Из плавности и симметрии параболы следует, что прямая  $X'X$  касается параболы в ее вершине. Парабола сильнее всего искривлена вблизи вершины; чем дальше от вершины, тем парабола больше распрямляется. С удалением от вершины точки параболы отходят от оси, но все более медленно \*\*).

\*) Внесем уточнение. По параболической траектории двигалось бы брошенное тело, если бы не существовало сопротивления воздуха. На самом деле траектория падающего тела немного отклоняется от параболы.

\*\*) Например при подъеме на 1 см от  $L_1$  до  $L_1'$  по оси  $OY$  соответствующая точка  $M_1$  параболы отойдет от оси  $OY$  на  $N_1N_1' = 0,7$  см, а при подъеме на ту же длину от точки  $L_2$ , расположенной выше, чем  $L_1$ , точка  $M_2$  параболы отойдет по горизонтали только на 0,4 см.

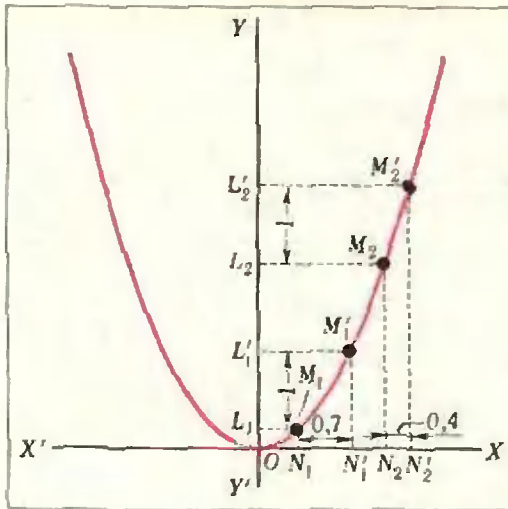


Рис. 1.

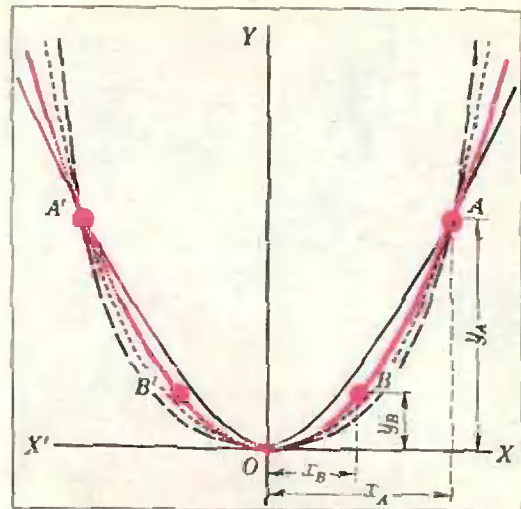


Рис. 2.

Это описание, конечно, не вполне определяет параболу. Существует много кривых, имеющих такой же вид, но лишь некоторые из них имеют право называться параболой.

Из всевозможных линий, изображенных на рисунке 2 и имеющих общую ось  $OY$ , вершину  $O$  и пару симметричных точек  $A$  и  $A'$ , только одна — красная — является параболой. Она проходит через две «средние» точки  $B$  и  $B'$  такне, что  $x_B = \frac{1}{2}x_A$  и  $y_B = \frac{1}{4}y_A$ . Это будет установлено из определения параболы.

### Определение параболы и первое ее построение по точкам

Из школьного курса известно, что параболой называется график функции  $y = ax^2 + bx + c$  при  $a \neq 0$ . Нам достаточно рассмотреть функцию

$$y = ax^2 \quad (1)$$

и ограничиться случаем  $a > 0$ . Добавление слагаемых  $bx$  и  $c$  не меняет ни формы, ни размеров графика, а только сдвигает его. График же функции (1) при  $a < 0$  это — опрокинутый график функции  $y = |a|x^2$ . Поэтому мы определим параболу как график функции (1) при  $a > 0$  (разумеется, параболой является и лю-

бая другая кривая, которую можно совместить с этим графиком).

Вместо слов «парабола есть график функции (1)» можно сказать: «уравнение (1) есть уравнение параболы\*»). Для параболы (и для любой линии, которая пересекает каждую прямую, параллельную оси  $Y'Y$ , не более чем в одной точке) оба выражения равноправны. Отметим также принятый оборот речи: вместо слов «парабола, имеющая уравнение  $y = ax^2$ », говорят кратко: «парабола  $y = ax^2$ ».

Из этого определения параболы можно вывести все особенности ее формы, о которых было сказано: ее бесконечное протяжение, симметрию, гладкость, наличие вершины, распрямление параболы по мере удаления от вершины, характер отклонения от оси симметрии, доказательство того, что тело, брошенное под углом к вертикали, движется по параболе. Мы не будем здесь проводить этих доказательств. Остановимся только на том, как получены точки  $B$  и  $B'$  на рисунке 2 и как вообще построить несколько точек параболы, если заданы ее вершины, направление оси и еще одна точка.

\* ) Об уравнении линии см., например, в статье «Эллипс», «Квант», № 1, с. 5.

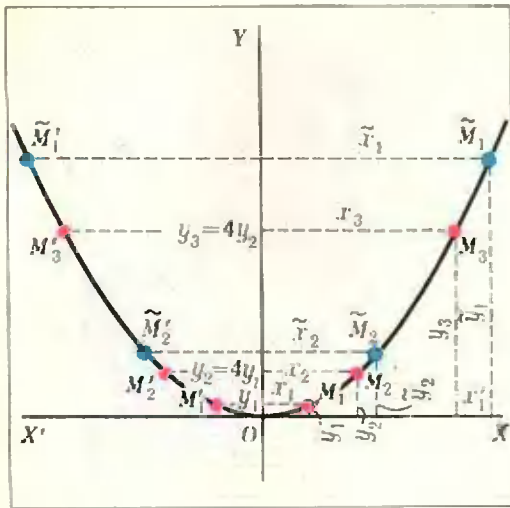


Рис. 3.

Пусть даны: вершина параболы  $O$ , ее ось  $OY$  и точка  $M_1$ , принадлежащая параболе (рис. 3); точка  $M_1'$ , симметричная  $M_1$  относительно  $OY$ , также лежит на параболе. Если  $M_1$  близка к  $O$ , то удвоим  $x_1 = ON_1$  и учетверим  $y_1 = OL_1$ . (см. рис. 1). Точки  $M_2$  ( $2x_1, 4y_1$ ) и  $M_2'$  ( $-2x_1, 4y_1$ ) также принадлежат параболе (докажите). Если же точка  $\tilde{M}_1(x_1, y_1)$  была далеко от  $O$ , то возьмем точку  $\tilde{M}_2(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{4})$  — она тоже лежит на параболе. С полученной точкой  $M_2$  (или  $\tilde{M}_2$ ) поступаем так же. Получив несколько точек параболы, соединяем их плавной линией от руки или при помощи лекала. Ниже будут указаны и другие способы построения параболы, практически более удобные.

### Коэффициент $a$ параболы и его роль

Различных парабол — бесконечное множество: каждому значению  $a$  соответствует своя парабола\*). На рисунке 4 изображено несколько таких

\* Число  $a$  является одним из параметров параболы (определение параметра см. в статье «Гипербола», с. 16.) Но мы намеренно избегаем здесь этого слова, так как для параболы слово «параметр» обычно применяется в специальном смысле (см. ниже).

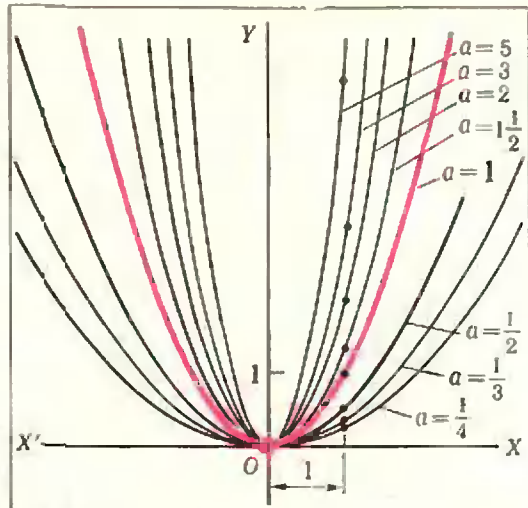


Рис. 4.

парабол — при  $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 5$ .

Замечательно, что все параболы подобны между собой, а если их расположить так, как на рисунке 4, то и подобно расположены с центром подобия  $O$ . Действительно, возьмем две такие параболы  $y = ax^2$  и  $y = a'x^2$  (рис. 5) и проведем произвольный луч  $OMM'$ , встречающий параболы соответственно в точках  $M$  и  $M'$ . Из подобия треугольников  $OMM$  и  $ON'M'$  имеем, с одной сторо-

ны,  $\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{x'}{x}$  или

$$\frac{OM'^2}{OM^2} = \frac{x'^2}{x^2}, \quad (a)$$

а с другой,

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{N'M'}{NM} = \frac{y'}{y} = \frac{a'x'^2}{ax^2}. \quad (б)$$

Разделив (а) на (б), получим  $\frac{OM'}{OM} = \frac{a}{a'}$ ,

то есть это отношение — одно и то же для всех лучей  $OMM'$ . А это и есть определение подобного расположения двух фигур. У всех парабол одинаковая форма: отличаются они друг от друга только размерами. А размер каждой параболы определяется коэффициентом  $a$  в уравнении (1).

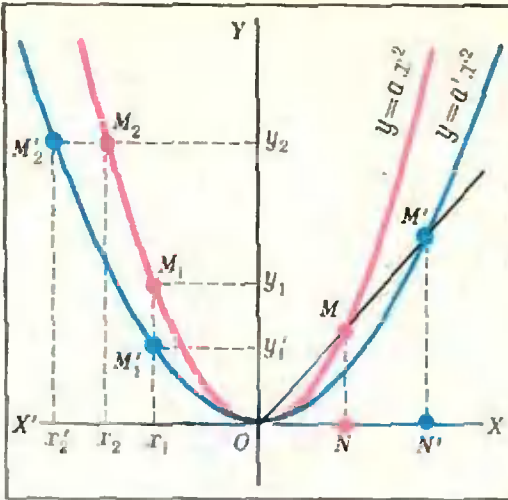


Рис. 5.

Сравнив две параболы  $y = ax^2$  и  $y = a'x^2$ , видим, что при одном  $x_1$  для двух точек парабол  $M_1(x_1, ax_1^2)$  и  $M'_1(x_1, a'x_1^2)$  выше та, у которой коэффициент больше (рис. 5); при одном  $y_2$  из двух точек парабол

$$M_2\left(\sqrt{\frac{y_2}{a}}, y_2\right) \text{ и } M'_2\left(\sqrt{\frac{y_2}{a'}}, y_2\right)$$

ближе к оси симметрии та, у которой этот коэффициент больше. Значит, чем меньше  $a$ , тем парабола шире, чем больше  $a$ , тем парабола уже. Образно можно назвать число  $a$  «коэффициентом худобы» параболы.

## II. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

### Недостатки аналитического определения

Определение параболы как графика квадратичной функции можно назвать аналитическим, так как оно использует вычислительные средства\*). При таком определении к параболе присоединяется система координат, вовсе не необходимая при первом знакомстве с кривой. Аналити-

\*) Слово «анализ» имеет много значений. Математическим анализом в широком смысле слова называют разработку приемов вычислений и их применений к решению вопросов о величинах.

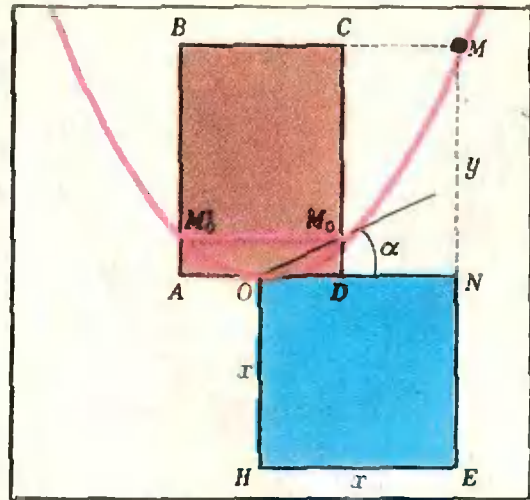


Рис. 6.

ческий метод удобен для изучения свойств рассматриваемого геометрического образа (этот метод составляет предмет аналитической геометрии), но для его определения желательно использовать только сведения из геометрии.

Вторым недостатком является то, что число  $a$  (коэффициент худобы), участвующее в определении, имеет сравнительно сложный геометрический смысл\*).

### Параметр параболы, ее каноническое уравнение и происхождение названия

Второй недостаток можно устранить, заменив в уравнении (1) параметр  $a$  другим, имеющим простой геометрический смысл и линейную размерность. Мы видели, что парабола определяется ее вершиной, направлением оси и какой-нибудь одной ее точкой ( $M_0$ ). Для определенности и удобства дальнейшего изложения возьмем такую точку  $M_0$ , чтобы ее расстояние  $x_0$  от оси симметрии  $OY$  было вдвое больше расстояния  $y_0$  ее до касательной  $X'X$  в вершине (рис. 6).

\*) Из-за того, что размерность коэффициента  $a$  обратна размерности длины:  $[a] = [L^{-1}]$ .

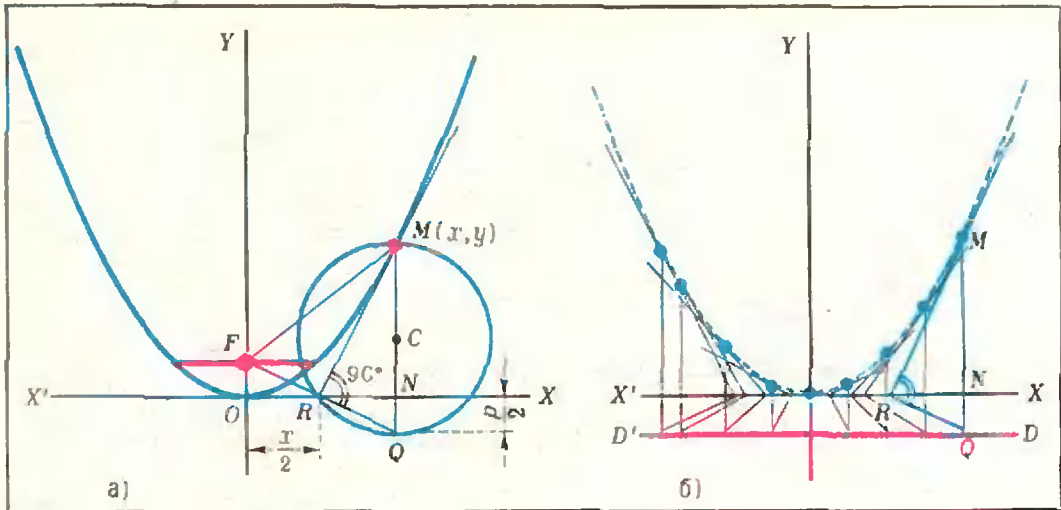


Рис. 7.

Расстояние  $x_0$  обозначим через  $p$ ; тогда  $y_0 = \frac{p}{2}$ . Из уравнения (1) имеем  $\frac{p}{2} = ar^2$ , откуда  $a = \frac{1}{2p}$  и уравнение (1) принимает вид  $y = \frac{1}{2p} x^2$  или

$$x^2 = 2py. \quad (2)$$

Оно называется *каноническим уравнением параболы*.

Отрезок  $p$  принято называть *параметром* параболы \*). Хорда  $M_0M_0 \parallel X'X$  (рис. 6), проходящая на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от касательной  $X'X$  в вершине, имеет длину  $2p$ ; будем называть ее *главной хордой* параболы; ее значение выяснится позже.

Уравнению (2) можно дать такое геометрическое истолкование. Для любой точки  $M(x, y)$  параболы площадь прямоугольника  $ABCD$ , одна сторона которого равна главной хорде  $2p$ , а другая — ординате  $y$ , равна площади квадрата  $ONEH$ , построенного на абсциссе.

Примерно в такой форме древнегреческие геометры, не знавшие языка формул и буквенных обозначений, выражали равенство (2).

\*) Точнее,  $p$  следовало бы назвать *фокальным параметром* параболы по причине, которая скоро выяснится.

Построение прямоугольника с заданной стороной, равновеликого данному квадрату, древние греки называли «прикладыванием данного отрезка к квадрату». Слово «прикладывание» по гречески — *parabole* — отсюда и происхождение названия кривой.

Другой способ построения точек параболы. Директриса

Решим и мы задачу на «прикладывание», немного видоизменив ее. Это решение даст новый способ построения точек параболы.

Представим равенство (2) в виде

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{p}{2} \cdot y, \quad (2')$$

то есть «приложим» отрезок  $\frac{p}{2}$  к квадрату со стороной  $\frac{x}{2}$ . Так как  $\frac{x}{2}$  — средняя пропорциональная для  $\frac{p}{2}$  и  $y$ ,

то построение  $y$  по  $\frac{p}{2}$  и  $\frac{x}{2}$  сводится к использованию теоремы о высоте прямоугольного треугольника, опущенного на гипотенузу. Для построения ординаты точки  $M$  параболы (2') по ее абсциссе  $ON = x$  (рис. 7, а) проводим отрезок  $NQ \perp X'X$  длиной  $\frac{p}{2}$  в сторону, противоположную на-

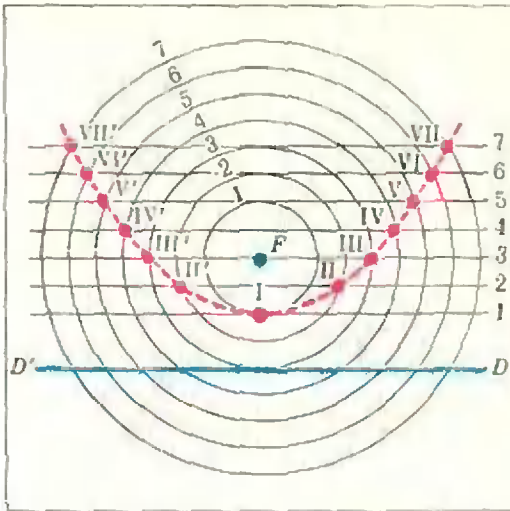


Рис. 8.

правлению оси  $OY$ , соединим  $Q$  с серединой  $R$  отрезка  $ON$  и проведем  $RM \perp QR$  до пересечения  $M$  с продолжением  $QN$  за точку  $N$ . Точка  $M$  принадлежит параболу.

Так можно поступить с любой точкой  $N$  на оси  $X'X$ . Для простоты построения других точек сразу проведем прямую  $D'D$  параллельно  $X'X$  на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от нее по другую сторону от главной хорды (рис. 7, б). Эта прямая называется *директрисой* (по-русски — направляющая) параболы. Восстанавливаем из любой точки  $N$  на оси  $X'X$  перпендикуляр к ней до пересечения с директрисой в точке  $Q$  и затем, поступая указанным образом, получаем точку  $M$ . Советуем читателю получить ряд точек параболы этим построением \*).

#### Фокус и фокальное свойство параболы

Из этого способа построения точек параболы вытекает наиболее замечательное ее свойство, которое часто принимается за определение параболы.

\*) Интересно, что отрезок  $RM$  является касательной к параболу в точке  $M$ . Доказательства этого мы здесь давать не будем.

Обратим внимание на точку  $F$  пересечения прямой  $QR$  и главной хорды (см. рис. 7, а). Легко сообразить, что эта точка лежит и на оси симметрии  $OY$ . Действительно, треугольники  $RNQ$  и  $ROF$  равны, как прямоугольные треугольники с одинаковыми катетами ( $NQ = OF$ ,  $OR = RN$ ). Поэтому какую бы точку  $N$  мы ни взяли, построенная по ней прямая  $QR$  пересечет главную хорду в ее середине  $F$ . Теперь ясно, что  $\triangle FMQ$  — равнобедренный. Действительно, отрезок  $MR$  является одновременно и медианой и высотой этого треугольника. Отсюда следует, что  $MF = MQ$ . Расстояние от любой точки параболы до середины главной хорды равно ее расстоянию до директрисы. Середина главной хорды параболы приобретает таким образом особое значение для параболы; ее называют фокусом параболы \*), а доказанное свойство — *фокальным свойством параболы*. Вершина параболы является серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

Справедливо и обратное положение: указанным свойством обладают только точки параболы (попробуйте доказать это самостоятельно).

Таким образом, *парабола — это множество точек, одинаково удаленных от фокуса и директрисы*. Это характеристическое свойство параболы — наиболее простое ее геометрическое определение. На этом определении основан третий способ построения точек параболы (рис. 8). Построим серию концентрических окружностей с центром в фокусе  $F$  (начиная с радиуса  $\frac{p}{2}$ ) и серию прямых, параллельных директрисе (начиная с той, которая находится на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от директрисы), чтобы радиусы и эти расстояния возрастали на одну и ту же величину. Точки пе-

\*) Фокус (*focus*) по-латински — очаг. Происхождение этого термина будет объяснено в следующем номере «Кванта».



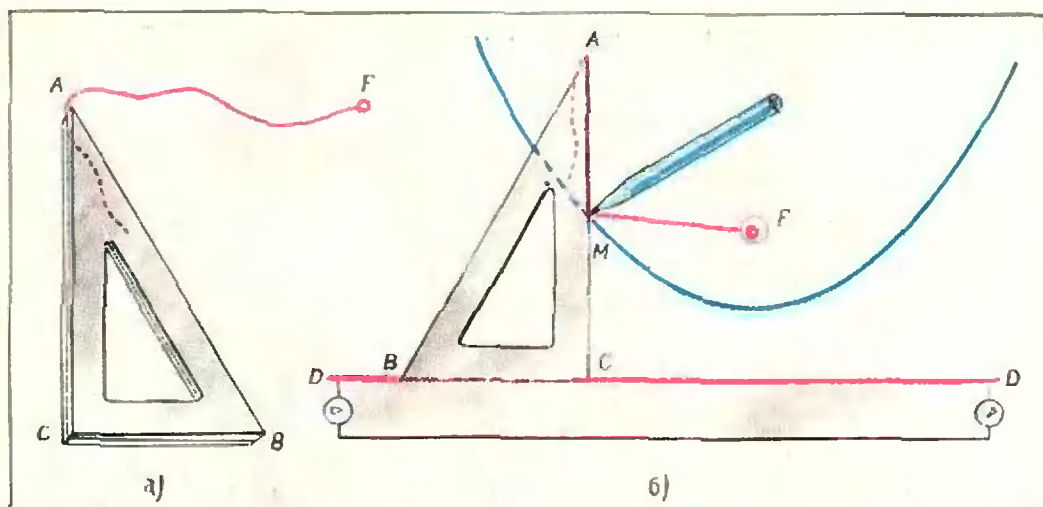


Рис. 9.

ресечения соответствующих окружности и прямой лежат на параболе.

### Параболограф

Нетрудно изготовить прибор (назовем его параболографом) для вычерчивания дуги параболы любого параметра непрерывным движением (и притом — наиболее характерной части параболы, содержащей вершину). Параболограф состоит из двух одинаковых угольников и нити. Чем больше длинный катет угольников, тем больше будет вычерченная дуга. Кроме параболографа для вычерчивания понадобятся линейка и 3 канцелярские кнопки.

Склейте вместе оба угольника (рис. 9, а), проложив предварительно между ними нить так, чтобы одна ее часть была прочно вклеена, а другая, свободная, выходила из вершины  $A$  меньшего острого угла. На свободной части нити сделайте узелок с маленькой («точечной») петлей в такой точке  $F$  нити, чтобы длина этой части  $AF$  равнялась длине большего катета  $AC$  угольника\*). Затем отрежьте

остаток нити за узелком. Параболограф готов.

На листе бумаги начертим фокус и директрису параболы. Приложим к директрисе линейку так, чтобы она легла по другую сторону от фокуса. Зажмем линейку между двумя кнопками, вколотыми у ее концов, вденем острие третьей кнопки в петлю  $F$  нити и вколем эту кнопку в фокус (рис. 9, б).

Приложим параболограф коротким катетом к линейке-директрисе. Острием карандаша прижмем нить к длинному катету в его точке  $M$ , чтобы нить была натянута. Точка  $M$  лежит на параболе, так как  $AC = AM + MF$  и  $MC = MF$ . Если теперь одной рукой двигать параболограф вдоль неподвижной линейки, а другой прижимать карандашом нить к длинному катету, то острие карандаша опишет дугу левой половины параболы. Перевертывая параболограф другой стороной, вычертим вторую половину.

### III. ПАРАБОЛА — КОНИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Пересекая поверхность прямого кругового конуса плоскостью, параллельной одной из его образующих, мы получим в сечении параболу.

\*) Рекомендуется сначала сделать на нити узелок с петлей, а затем, отмерив от узелка  $F$  длину  $FA=AC$ , вклеить остаток нити между угольниками.

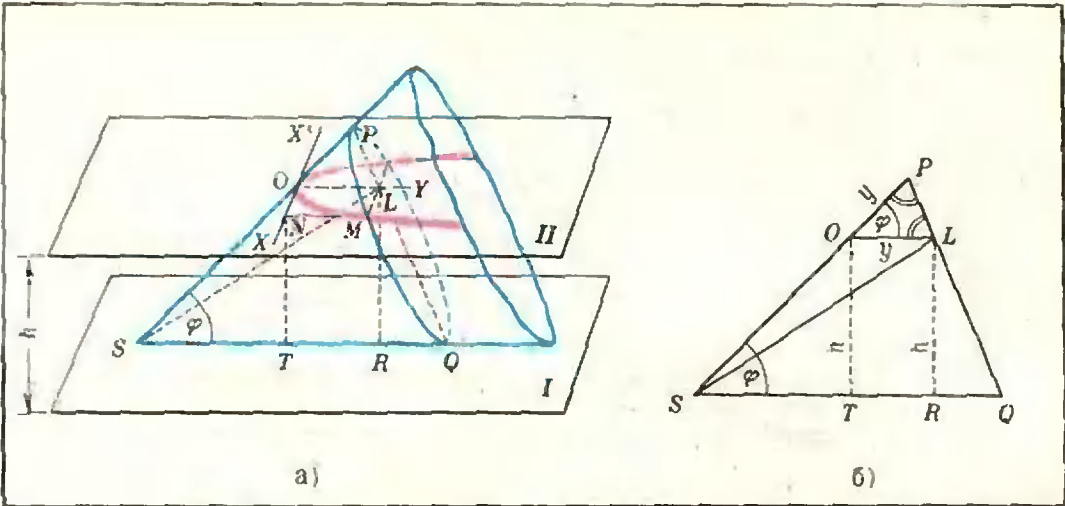


Рис. 10.

Докажем это. Положим конус на горизонтальную плоскость I (рис. 10, а). Введем обозначения: S — вершина конуса, φ — его осевой угол, SQ — образующая, вдоль которой конус касается плоскости I.

Пересечем конус плоскостью II, параллельной I (и, следовательно, параллельной образующей SQ), на высоте h (расстояние между плоскостями). Нужно доказать, что плоскость II пересекает конус по параболе.

Проведем через образующую SQ и через ось конуса вертикальную плоскость SQP, изображенную отдельно на рисунке 10, б; она пересекает плоскость II по прямой OY — оси симметрии исследуемого сечения. Через точку O встречи этой прямой с конусом проведем в плоскости II прямую X'X ⊥ OY и примем X'X и OY за оси координат. Произвольная точка M нашего сечения имеет в этой системе координат абсциссу ON = x и ординату NM = OL = y. Нам нужно найти уравнение линии сечения в этой системе координат и показать, что оно имеет вид  $x^2 = 2py$ .

Через M проведем круговое сечение конуса QMP, перпендикулярное к его оси. Из прямоугольного треугольника SML имеем  $LM^2 = SM^2 - SL^2 = SP^2 - SL^2$ . (а)  
Очевидно,

$$SP = SO + OP = SO + OL = \frac{h}{\sin \varphi} + y. \quad (б)$$

Из треугольника SOL

$$\begin{aligned} SL^2 &= SO^2 + OL^2 - \\ &\quad - 2SO \cdot OL \cos(180^\circ - \varphi) = \\ &= \left(\frac{h}{\sin \varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin \varphi} \cos \varphi. \quad (в) \end{aligned}$$

Подставляя (б) и (в) в (а), получаем

$$\begin{aligned} x^2 &= \left[\left(\frac{h}{\sin \varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin \varphi}\right] - \\ &\quad - \left[\left(\frac{h}{\sin \varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin \varphi} \cos \varphi\right] = \\ &= 2h \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} y. \end{aligned}$$

Обозначая  $h \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$  через p, имеем

$x^2 = 2py$ . В сечении получается парабола с параметром p.

В частности, если осевой угол конуса φ прямой, то  $p = h$ . Таким образом, если конус с прямым углом в осевом сечении пересекается плоскостью, перпендикулярной к одной из его образующих, то в сечении получается парабола, параметр которой равен расстоянию от вершины конуса до плоскости сечения. Интересно, что Менехм, открывший около 360 г. до нашей эры эллипс, гиперболу и параболу, получил их как сечения кругового конуса соответственно с острым, тупым и прямым осевым углом плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих, и они были впервые названы сечениями остроугольного, тупоугольного и прямоугольного конуса. Современные названия этих кривых были даны позднее Аполлонием.

• • •

В статье приведены только начальные сведения о параболе. Дальнейшие ее свойства, общие для эллипса, гиперболы и параболы, будут рассмотрены в статье «Общие свойства конических сечений».



# ЗАЧЕМ ТОПЯТ ПЕЧИ?

В.Н. ЛАНГЕ



Если спросить специалиста по тепло-технике и человека, не искушенного в этой науке, зачем мы топим печи зимой, то первый ответит, возможно: для того, чтобы повысить внутреннюю энергию воздуха в комнате; тогда как второй почти наверняка выразится проще: чтобы в комнате стало теплее. И неспециалист даст более точный ответ.

Как это ни кажется на первый взгляд неправдоподобным, внутренняя энергия воздуха в помещении после сгорания дров в печи останется неизменной.

Предположим, что поздней осенью вы приехали на дачу. В комнатах около  $0^{\circ}\text{C}$ , и чтобы согреться, вы решили протопить печь. Пока столбик в термометре поднимается к отметке  $20^{\circ}$ , посчитаем, как изменится за это время внутренняя энергия воздуха в комнатах.

При условиях, близких к нормальным (то есть при температуре, не очень сильно отличающейся от  $0^{\circ}\text{C}$ , и давлении порядка  $10^5 \text{ н/м}^2$ ), воздух подобен идеальному газу, внутренняя энергия которого пропорциональна массе  $m$  и абсолютной температуре  $T$ :

$$U = \alpha m T,$$

( $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, постоянный для данного газа).

При протапливании помещения воздух нагревается, расширяется, и часть его выходит через неплотно прикрытую дверь, поры и щели в стенах, так что масса воздуха в комнатах меняется. Объем комнат и давле-

ние воздуха при этом остаются неизменными. Поэтому изменение внутренней энергии воздуха после протапливания можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_2 - U_1 = \\ &= \alpha m_2 T_2 - \alpha m_1 T_1 = \\ &= \alpha (m_2 T_2 - m_1 T_1).\end{aligned}$$

Воспользуемся для дальнейшего решения уравнением Клапейрона — Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Поскольку, как мы уже отметили, давление в комнате остается все время равным внешнему и объем комнаты не меняется, а меняется только масса воздуха, получаем

$$m_2 T_2 = m_1 T_1 = \frac{PV\mu}{R} = \text{const.}$$

Стало быть, после сгорания дров внутренняя энергия воздуха в комнатах действительно не меняется, то есть все выделившееся тепло «уходит» через щели на улицу.

Зачем же в таком случае мы все же протапливаем жилые помещения? Дело в том, что, хотя для нас совершенно несущественна суммарная внутренняя энергия воздуха в комнатах, наше тело очень хорошо чувствует температуру, которая определяется энергией, приходящейся на одну молекулу.

Немецкий астрофизик Р. Эмден в 1938 году отметил, что протапливать помещения необходимо по той же причине, по которой жизнь на Земле стала бы невозможной без постоянного притока солнечного тепла. И дело заключается не в количестве падающей энергии, которая будет снова излучена вплоть до пренебрежимо малой доли, подобно тому как человек не меняет своего веса, несмотря на принятие пищи. Просто условия нашего существования требуют определенной температуры, для достижения которой мы и топим печи.

## Из научного юмора, или электричество и жизнь

В весьма серьезных научно-технических журналах встречаются сообщения, которые могли бы существенно пополнить сборники типа «Физики шутят». Иногда шутка маскируется наукообразным слогом, и бывает, что материал попадает в картотеки, указатели, составители которых вовсе не думали шутить.

В приводимой ниже заметке Тома Стивенсона из американского журнала «Electronic Design News» юмор фактически не скрывается, но чтобы разоблачить «парадокс Стивенсона», нужно вспомнить кое-что из основ учения об электричестве. Вот что пишет Т. Стивенсон в заметке «Генератор высокого напряжения».

«Работая недавно над статьей, я отвлекся из-за одной интересной мысли. Возьмем два больших медных диска. Прикрепим к каждому из них провод и изолирующую рукоятку. Дадим по рукоятке двум мальчикам.

Далее, пусть мальчики держат диски на очень близком расстоянии, но так, чтобы они не касались друг друга. Зарядим получившийся конденсатор от 12-вольтового автомобильного аккумулятора. Отсоединим аккумулятор. Если мальчики будут спокойно стоять, то напряжение между дисками останется равным 12 вольтам. Но что произойдет, когда они будут двигаться?»

Из элементарного уравнения  $U$  (напряжение) =  $\frac{Q}{C}$  (заряд) / (емкость) видно, что если они вдвое уменьшат расстояние между дисками, то напряжение также уменьшится вдвое, потому что заряд не может измениться, а емкость удвоится.

(Продолжение см. с. 24).

## Суточное вращение Земли

В статье Я. А. Смородинского «Сила Кориолиса» (см. с. 2 этого номера журнала) подробно рассказывается о силе инерции, которая действует на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета. Такой «естественной» системой является, прежде всего, Земля. Существует много явлений, например отклонение свободно падающих тел, неодинаковое размывание реками берегов, возникновение воздушных вихрей и ветров и т. п., которые объясняются действием силы Кориолиса.

Исторически первым экспериментом, подтвердившим вращение Земли вокруг своей оси, был опыт Фуко. В этой статье рассказывается о простом опыте, который наглядно демонстрирует суточное вращение Земли.

Представьте себе большой цилиндрический сосуд, оканчивающийся воронкой (рис. 1). Сосуд наполнен водой и подвешен к потолку с помощью длинного шнура. В начальный момент, когда отверстие воронки закрыто, сосуд покоится относительно Земли. Что произойдет, если открыть отверстие? Для простоты рассуждений будем считать, что опыт проводится на северном полюсе Земли. В том месте сосуда, где находится воронка, вытекающая вода имеет не только вертикальную, но и горизонтальную проекцию скорости.

Обозначим через  $v_0$  горизонтальную проекцию скорости воды относительно сосуда. Величина  $v_0$  зависит от высоты столба воды над данным

уровнем в воронке и от расстояния до оси сосуда.

Наличие скорости  $v_0$  обуславливает возникновение силы Кориолиса. На рисунке 2 показаны направления вращения Земли, скорости  $v_0$  и силы Кориолиса  $F_K$  для некоторого слоя воды. Сила Кориолиса, действующая на каждый малый элемент массы воды, имеет вращательный момент относительно оси симметрии сосуда. Это приводит к тому, что вода в сосуде приходит во вращение. Так как между водой и стенками сосуда есть трение, то сосуд тоже придет в движение, причем направление движения сосуда совпадает с направлением вращения Земли.

По мере того, как вода вытекает из сосуда, величина скорости  $v_0$  уменьшается, и следовательно, сила Кориолиса, действующая на воду, уменьшается (так как  $F_K \sim v_0$ ). Каким будет характер движения воды под действием переменной силы  $F_K$ ? Величина ускорения, сообщаемого этой силой, уменьшается, при этом скорость вращения воды возрастает, но чем дальше, тем медленнее.

Вращение сосуда приводит к закручиванию нити, на которой он подвешен. При этом возникает момент упругих сил деформации, который противодействует закручиванию нити, и следовательно, вращению сосуда. Величина момента сил деформации растет по мере увеличения угла закручивания нити, то есть по мере увеличения скорости вращения сосуда. Так как сила Кориолиса, ко-

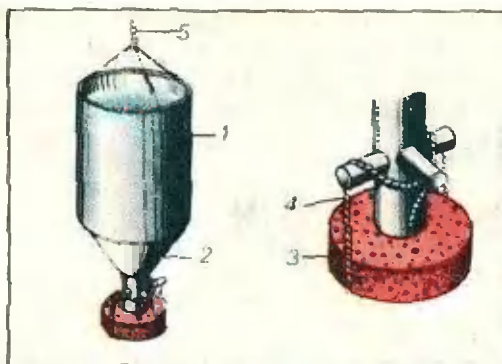


Рис. 1. Сосуд для опыта. 1 — цилиндрический сосуд; 2 — воронка; 3 — мягкая резина на твердой основе; 4 — нить; 5 — двойная струна для бадминтона.

торая в конечном итоге приводит к вращению сосуда с водой, со временем уменьшается, то в какое-то время действие момента силы Кориолиса компенсируется действием момента сил деформации, и в дальнейшем силы деформации превалируют над силой Кориолиса. В результате скорость вращения сосуда уменьшается, но сосуд по-прежнему вращается в направлении вращения Земли.

В некоторый момент времени угловая скорость вращения сосуда становится равной нулю, и затем, под действием момента упругих сил деформации, сосуд начинает вращаться в противоположную сторону. Угловая скорость вращения растет. Теперь начинает уменьшаться сила деформации (нить раскручивается). Действие момента силы Кориолиса (эта сила по-прежнему уменьшается) теперь направлено против вращения сосуда и ведет к уменьшению скорости вращения. . . . В какой-то момент времени убывающий момент сил деформации «догонит» по величине момент силы Кориолиса, после этого скорость вращения начнет уменьшаться и т. д.

При проведении опыта мы пользовались цилиндрическим сосудом диаметром 25 см и высотой 30 см (см. рис. 1). Сосуд оканчивался воронкой с диаметром отверстия 8 мм. На сточную трубку воронки была надета муфта с четырьмя симметрично расположенными винтиками.

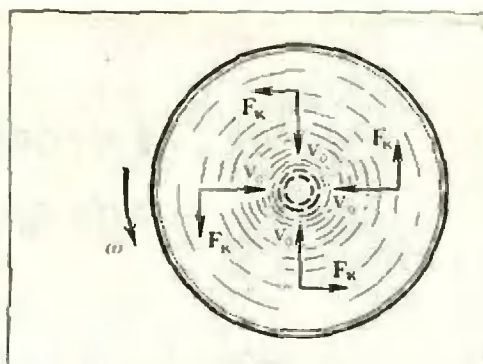


Рис. 2

К концу трубки с помощью нитки, перекинутой через два противоположных винтика, плотно прижималась мягкая резинка на твердой основе. Нитка завязывалась узлом на одном из винтиков. Сосуд мы подвешивали к потолку на двойной струне для бадминтона длиной 2,5 м (можно взять два шнура, закрученных в противоположные стороны, чтобы устранить побочные явления при вращении). В сосуд почти до верхнего края наливали воду, и когда она успокаивалась, узел нити пережигали. Во всех случаях мы наблюдали, что во время вытекания воды через отверстие в воронке сосуд вращался сначала против часовой стрелки, а потом — в противоположную сторону.

Опыт можно проводить также со стеклянными воронками, подвешенными на двойных тонких лесках. Но при этом оказывается, что угол поворота сосуда существенно зависит от диаметра отверстия воронки. С одной стороны, действие силы Кориолиса проявляется тем заметнее, чем меньше отверстие. Но с другой стороны, при уменьшении отверстия повышается роль вязкости жидкости. Нам удалось наблюдать заметное вращение воронки, вмещающей 1 л воды, при диаметре отверстия 5 мм.

М. И. Емельянов,  
А. М. Жарков,  
В. М. Загайнов,  
В. С. Маточкин



## Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки

А. П. Винниченко

Вероятно, некоторые читатели слышали о спирали Улама (о ней рассказывается, например, в книге М. Гарднера «Математические досуги»). Если же кто-то ничего не знает об этой спирали — не беда; вот вкратце ее история. Однажды американский математик Станислав Улам, присутствуя на каком-то неинтересном заседании, нарисовал от скуки на листке клетчатой бумаги спираль, пронумеровал клетки этой спирали и обвел кружочками простые числа \*). У Улама получилась картинка, изображенная на рисунке 1: простые числа в его спирали как бы выстраивались по диагоналям. Сейчас мы расскажем об ином порядке записи натурального ряда, при котором простые числа все равно размещаются как бы по диагоналям.

\*) Натуральное число (не равное 1) называется простым, если оно делится только на себя и единицу.

Составим «квадратичный треугольник»: напишем в первой строке только одно число — 1, во второй — числа от 2 до 4, в третьей — числа от 5 до 9 и так далее, обрывая строку всякий раз, как только получится квадрат какого-то натурального числа (см. рис. 2). Таким образом, первая строка у нас кончается  $1^2$ , вторая —  $2^2$ , третья —  $3^2$  и так далее (отсюда и название образующейся фигуры — «квадратичный треугольник»; докажите, что каждая строчка квадратичного треугольника длиннее предыдущей ровно на 2 клеточки).

Давайте теперь и мы обведем простые числа кружочками — так, как это сделано на рисунке 3.

Замечаете ли вы, что и здесь простые числа «выстраиваются» вдоль диагоналей (подумайте, кстати, почему они оказываются не на всех диагоналях, а только через одну — ис-

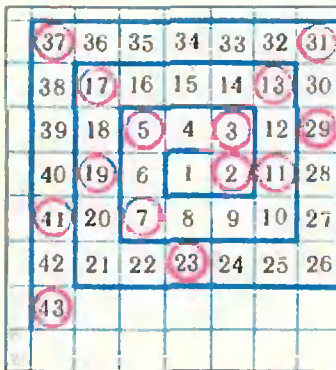


Рис. 1.

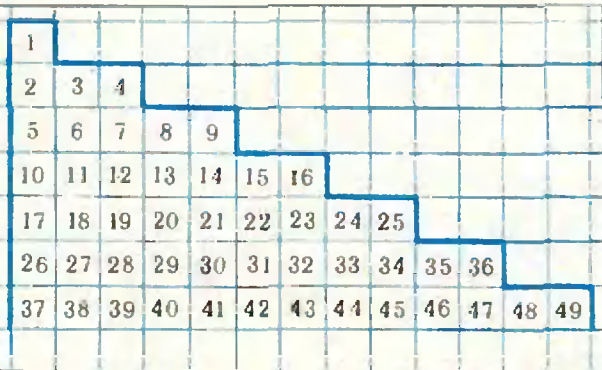


Рис. 2.

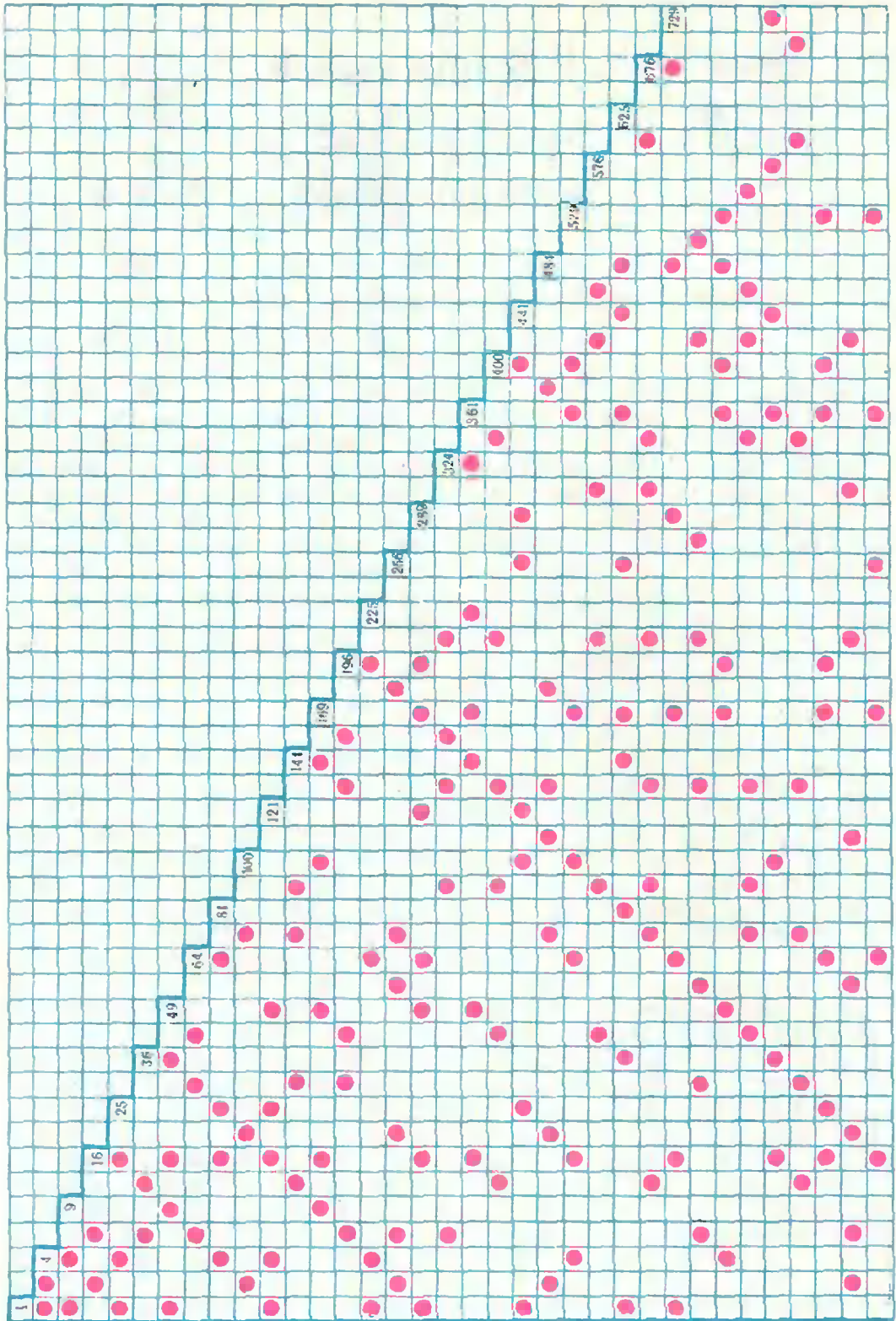


Рис. 3.



ключение составляет лишь число 2)? Но помимо этого на нашей картинке получились «непрерывные цепочки», тянущиеся от «гипотенузы» «треугольника» до его «катета» — на рисунке 3 таких цепочек шесть. Выпишем простые числа, стоящие вдоль этих цепочек:

- 2
- 3, 5
- 7, 11, 17
- 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101
- 47, 59, 73, 89, ..., 227, 257
- 223, 251, 281, 313, ..., 1523, 1601

Оказывается, все эти числа подчиняются одному и тому же закону:

1-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 2$  при  $x = 0$  (при  $x = 1$  получаем  $2^2$ ),

2-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 3$  при  $x = 0, 1$  (при  $x = 2$  получаем  $3^2$ ),

3-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 5$  при  $x = 1, 2, 3$  (при  $x = 4$  получаем  $5^2$ ),

4-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 11$  при  $x = 3, 4, 5, \dots, 8, 9$  (при  $x = 10$  получаем  $11^2$ ),

5-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 17$  при  $x = 5, 6, \dots, 14, 15$  (при  $x = 16$  получаем  $17^2$ ),

6-я цепочка — это значения многочлена  $x^2 + x + 41$  при  $x = 13, 14, \dots, 38, 39$  (при  $x = 40$  получаем  $41^2$ ).

Многочлены вида  $x^2 + x + k$  были известны еще Эйлеру; формула  $x^2 + x + k$  для  $k = 2, 3, 5, 11, 17, 41$  дает простые числа при всех  $x = 0, 1, \dots, (k-1), (k-2)$ .

Таким образом, наши непрерывные цепочки — это «хвосты» значений многочленов  $x^2 + x + k$ , где  $k = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ . Существуют ли более длинные непрерывные цепочки? Пока это неизвестно.

Вернемся к нашему квадратичному треугольнику — перенесем на него «решето Эратосфена» (см. «Квант» № 1 за 1974 год): возьмем какое-нибудь натуральное число и зачеркнем все числа, делящиеся на него. Мы получим какой-то узор; например, для числа 2 — это «шахматный» узор (рис. 4). Для тройки узор получается уже посложнее (см. рис. 5). Однако в этих зачеркиваниях есть закономерность. Так, если сделать из картона квадрат со стороной 2 и вырезать из него два квадратика, помеченных на рисунке 6 крестиками, то с помощью такого штампа можно вычеркнуть из квадратичного треугольника все числа, делящиеся на 2.

Действительно:

- 1) приложим штамп так, чтобы над ним виднелась только единичка;
- 2) зачеркнем числа в отверстиях;
- 3) передвинем штампик вниз, вправо или влево на две клеточки;
- 4) опять зачеркнем числа в отверстиях и так далее.

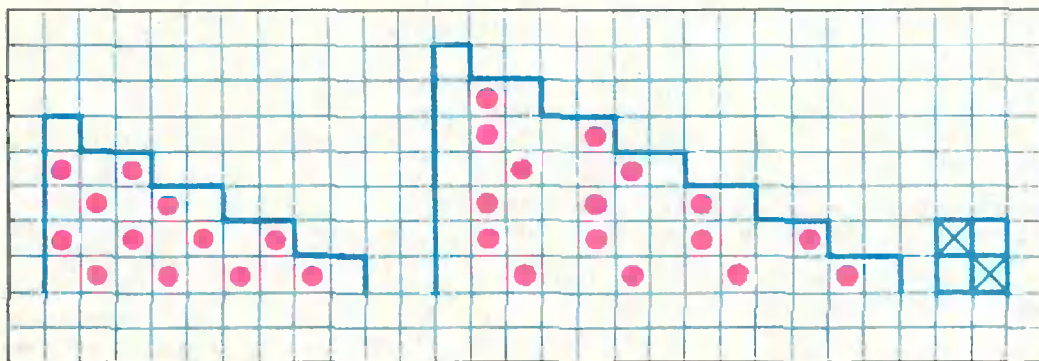


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

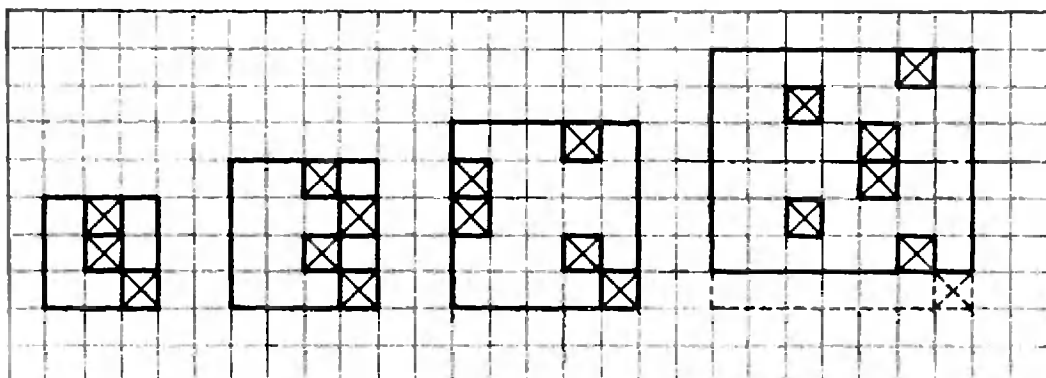


Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Для тройки нужный штамп изображен на рисунке 7, для четверки — на рисунке 8, для пятерки — на рисунке 9.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач.

1. Докажите, что, пользуясь штампом в виде квадрата  $k \times k$  (где  $k$  — любое натуральное число), на квадратичном треугольнике можно зачеркнуть все числа, делящиеся на  $k$ .

2. Докажите, что у штампа  $k \times k$  должно быть ровно  $k$  отверстий.

3. Докажите, что в каждой строке штампа должно быть по отверстию.

4. Докажите, что у штампа всегда будут отверстия в предпоследней клеточке первой строки и в последней клеточке последней строки.

5. Докажите, что если у штампа отрезать последнюю строчку, то оставшиеся отверстия будут расположены симметрично относительно горизонтальной оси (пример со штампом для семерки см. на рисунке 10).

## Из научного юмора, или электричество и жизнь

(Начало см. с. 18)

Рассуждая точно так же, получим, что, если увеличить вдвое расстояние между дисками, то напряжение должно удвоиться, потому что емкость уменьшилась вдвое.

Я думаю снабдить такими дисками двух босых мальчишек, и как только пойдет дождь, зарядить диски и пустить мальчишек пятиться в противоположных направ-

лениях. По моим расчетам, когда они сделают шагов по десятку, произойдет пробои с оглушительным треском и ослепительной вспышкой, и двое этих мальчишек уже никогда не будут мне мешать, когда я буду пытаться писать».

Такую участь уготовил Стивенсон бедным мальчишкам... Рассуждения об увеличении напряжения между обкладками плоскопараллельного конденсатора при увеличении расстояния между ними верны. Но только пробой диэлектрика (в данном случае воздуха) обусловливается не напряжением, а напряженностью электрического поля, а она в этом

«коварном» эксперименте постоянна:

$$E \text{ (напряженность)} = \frac{U \text{ (напряжение)}}{d \text{ (расстояние)}}$$

Более того, по мере увеличения расстояния между обкладками конденсатора однородность поля нарушится, и напряженность уменьшится.

Предлагаем вам самостоятельно провести все вычисления в «эксперименте Стивенсона» (в приближении однородного поля): кроме напряжения и напряженности электрического поля определить зависимость энергии системы и силы притяжения между дисками от расстояния между ними.

(Окончание см. с. 47)

# задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июня 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М316, М317» или «... Ф328». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

## Задачи

М316—М320; Ф328—Ф332

М316. а) Докажите, что сумма квадратов  $k$  последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если  $k$  равно 3, 5, 7 или 9.

б) Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа.

*Э. Г. Готман*

М317\*. На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каждая страна лишилась не более половины имевшегося у нее золота.

*Г. В. Егоров*

М318. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $[AD]$  и  $[CE]$ . Докажите, что  $|CE| \cdot |AB| = |AD| \cdot |BC|$  тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий: 1)  $|AB| = |BC|$ ; 2)  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

*А. П. Савин*

М319. На плоскости заданы окружность  $\gamma$  и точка  $P$  внутри нее. Рассмотрим множество тетраэдров  $ABCD$ , у которых все четыре грани конгруэнтны, причем треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\gamma$  так, что его медианы пересекаются в точке  $P$ .

а) При каком положении точки  $P$  внутри  $\gamma$  такие тетраэдры существуют?

б) Докажите, что вершины  $D$  таких тетраэдров расположены в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости)

*И. Ф. Шарыгин*

**М320\***. Какие выпуклые  $n$ -угольники можно разбить на треугольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке 1 показано, что треугольник так разбить можно.)

*А. Печковский*

**Ф328.** Жесткие стержни длины  $l_1$  и  $l_2$  соединены шарнирно в точке  $A$ . Их свободные концы удаляются друг от друга равномерно со скоростями соответственно  $v_1$  и  $v_2$ , направленными вдоль одной прямой (рис. 2). Найти ускорение точки  $A$  в тот момент, когда стержни составляют друг с другом угол  $90^\circ$ . Движение стержней происходит в одной плоскости.

*Б. Б. Буховцев*

**Ф329\***. Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы забираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

**Ф330.** В цилиндре под невесомым поршнем площади  $S$  находится воздух при атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ . Внутренний объем цилиндра разделен на две равные части неподвижной горизонтальной перегородкой с маленьким отверстием. На поршень кладут груз массой  $M$ , под действием которого поршень доходит до перегородки. Найти температуру воздуха внутри цилиндра, если стенки цилиндра и поршень не проводят тепло.

*Б. А. Луговой*

**Ф331.** Плоская спираль с очень большим числом витков  $n$  и наружным радиусом  $R$  (рис. 3) находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости спирали и изменяющемся по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ . Найти э. д. с. индук-

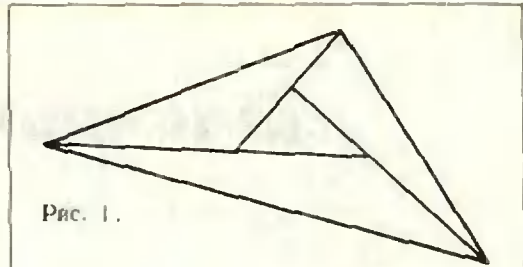


Рис. 1.

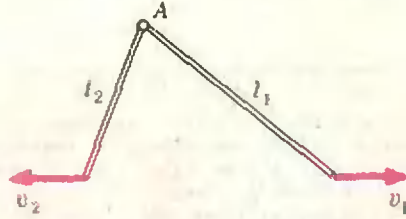


Рис. 2.

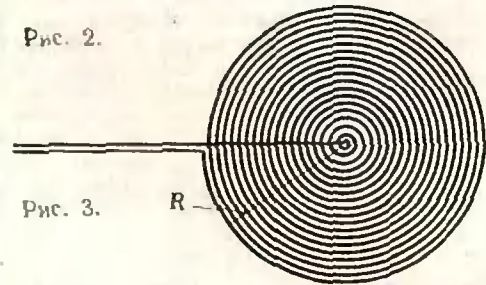


Рис. 3.

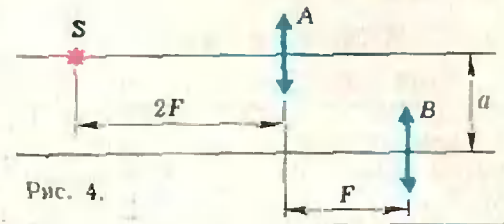


Рис. 4.

ции, наводимую в спирали. Расстояние между витками спирали постоянно.

*Г. Л. Коткин*

**Ф332.** Найти расстояние между источником света  $S$  и его изображением в оптической системе, приведенной на рисунке 4. Фокусные расстояния линз  $A$  и  $B$  одинаковы и равны  $F$ .

*В. Г. Сербо*

# Решения задач

М280—М285; Ф291—Ф295

**М280.** Дан треугольник  $ABC$  площади 1. Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $KLM$ , если точки  $K, L$  и  $M$  лежат соответственно на отрезках  $AB_1, CA_1$  и  $BC_1$ ?

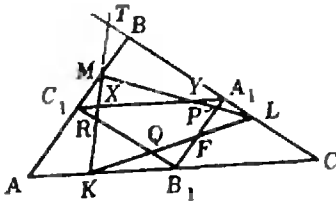


Рис. 1.

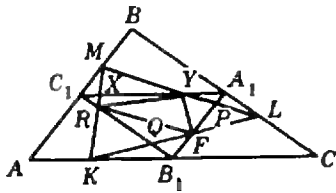


Рис. 2.

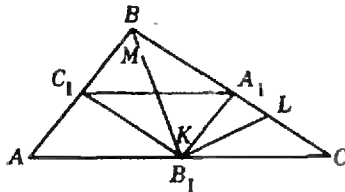


Рис. 3.

**М281.** Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

Решение состоит из двух частей. Сначала мы докажем, что площадь общей части не меньше половины площади треугольника  $A_1B_1C_1$ , что есть не меньше  $\frac{1}{8}$ , а затем построим пример, когда площадь пересечения равна  $\frac{1}{8}$ .

1) Обозначим через  $Q$  точку пересечения отрезков  $KL$  и  $C_1B_1$ , а через  $R$  и  $T$  — точки пересечения отрезка  $KM$  с отрезком  $C_1B_1$  и продолжением отрезка  $CB$  (рис. 1). Докажем, что  $RQ \geq QB_1$ . В самом деле, из подобия треугольников  $KTL$  и  $KRQ$ ,  $KLC$  и  $QKB_1$  имеем  $\frac{TL}{RQ} = \frac{LK}{QK} = \frac{LC}{QB_1}$ , то есть  $\frac{RQ}{QB_1} = \frac{TC}{LC}$ ; но  $TL \geq BA_1 = A_1C \geq LC$ , значит, и  $RQ \geq QB_1$ . Аналогично,  $FP \geq PA_1$  и  $XY \geq XC_1$  (см. рис. 1).

Соединим точки  $R, F$  и  $Y$  (рис. 2). Очевидно, что  $S_{RQF} \geq S_{B_1QF}$  (у этих треугольников общая высота, а  $RQ \geq QB_1$ ),  $S_{FPY} \geq S_{A_1PY}$  и  $S_{RXY} \geq S_{C_1XR}$ . Поэтому  $S_{B_1QF} + S_{A_1PY} + S_{C_1XR} \leq S_{RQF} + S_{FPY} + S_{RXY} + S_{RYF}$ , а так как сумма площадей всех семи треугольников равна площади  $\triangle A_1B_1C_1$ , то правая часть полученного неравенства не меньше половины площади этого треугольника.

2) Нужный пример построен на рисунке 3 (точка  $M$  совпадает с точкой  $B$ ,  $K$  — с  $B_1$ , точка  $L$  — любая).

Итак, минимально возможная площадь общей части треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $KLM$  равна  $\frac{1}{8}$ .

Б. М. Ивлев



Докажем, что многоугольник с указанным свойством не может иметь более пяти сторон.

Обозначим через  $n$  число сторон многоугольника и допустим, что  $n \geq 6$ . Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  — вершины многоугольника. Рассмотрим вершины  $A_1, A_2, A_{n-2}, A_{n-1}$ . Отрезки  $A_1A_2$  и  $A_{n-2}A_{n-1}$  являются сторонами, а отрезки  $A_1A_{n-1}$  и  $A_2A_{n-2}$  — диагоналями нашего многоугольника (в силу предположения о числе  $n$ , см. рис. 4).

В выпуклом четырехугольнике  $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$  сумма диагоналей  $A_1A_{n-1}$  и  $A_2A_{n-2}$  всегда больше суммы двух его сторон  $A_1A_{n-1}$  и  $A_2A_{n-2}$ ; а это противоречит тому, что  $A_1A_{n-1} = A_1A_{n-2} = A_2A_{n-1} = A_2A_{n-2}$  по условию задачи. Значит,  $n < 6$ .

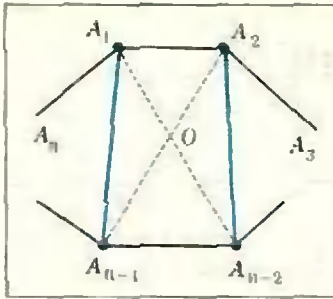


Рис. 4.

**М282.** В клетках прямоугольной таблицы размерами  $m \times n$  записаны любые натуральные числа. За один ход разрешается удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равными нулю.

**М283.** Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние  $l$  во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

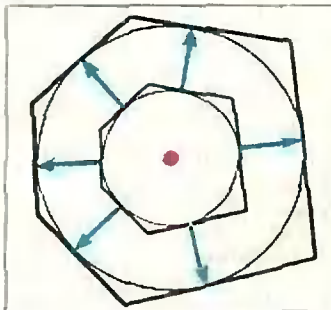


Рис. 5.

Очевидно, что  $n > 3$  (в треугольнике нет диагоналей). Для случаев же  $n=4$  и  $n=5$  многоугольники с указанным свойством легко строятся: ими являются квадрат и правильный пятиугольник.

Итак, ответ в задаче таков: число сторон может быть равным 4 или 5.

Г. А. Гальперин

Превратим в нули вначале все числа первого столбца. Если в первом столбце есть единицы, то удвоим числа в тех строках таблицы, на пересечении которых с первым столбцом стоят единицы, а затем вычтем из всех чисел первого столбца по единице. Понятно, что при этом «старые» единицы останутся на местах, а каждое отличное от единицы число первого столбца на единицу уменьшится. Если единиц в первом столбце с самого начала нет, то будем вычитать из всех его чисел по единице до тех пор, пока единицы (хотя бы одна) не появятся; а затем произведем уже описанную операцию. Эту операцию (удвоения строк, на пересечении которых с первым столбцом находятся единицы, и последующего вычитания по единице из каждого числа первого столбца) будем повторять, пока все числа первого столбца не станут единицами. Вычитая затем из каждого числа первого столбца по единице, мы превратим их все в нули.

Итак, мы получили таблицу, в первом столбце которой стоят нули, а в остальных  $n-1$  столбцах — натуральные числа. Превратим в нули описанным способом последовательно числа 2-го, 3-го, ...,  $n$ -го столбцов (заметим, что при этом уже имеющиеся нули не будут «портиться»), мы получим таблицу, состоящую целиком из нулей.

С. В. Конягин

Заметим, что обратное утверждение доказать значительно проще: если в многоугольник можно вписать окружность, то при отодвигании всех его сторон на одно и то же расстояние (в частности, на единицу) получается подобный многоугольник, причем центром подобия служит центр окружности (рис. 5).

Перейдем теперь к решению задачи.

Первое доказательство. Пусть многоугольник  $P'$  получается из многоугольника  $P$  отодвиганием сторон внутрь многоугольника  $P$  на расстояние  $l$  и в то же время  $P'$  можно получить из  $P$  преобразованием  $f$  подобия с коэффициентом  $k < 1$ . Подвергнем этому преобразованию многоугольник  $P$  вместе с нарисованным внутри него многоугольником  $P'$ . Тогда внутри  $P'$  (образа  $P$ ) появится новый многоугольник  $P''$  (образ  $P'$ ), подобный  $P'$  (с коэффициентом  $k$ ) и  $P$  (с коэффициентом  $k^2$ ), причем, очевидно, стороны  $P'' = f(P')$  можно получить отодвиганием сторон  $P'$  внутрь на расстояние  $k$ . Точно так же, отодвинув стороны еще на  $k^2$ , получим многоугольник  $f(P'') = P^{(3)}$ , расположенный внутри  $P''$  (образ  $P''$  при преобразовании  $f$ ), и так далее:  $f(P^{(3)}) = P^{(4)}, \dots, f(P^{(n)}) = P^{(n+1)}, \dots$   
 где  $P \supset P' \supset P'' \supset P^{(3)} \supset \dots \supset P^{(n)} \supset \dots$

Очевидно, поскольку стороны многоугольника  $P^{(n)}$  каждый раз уменьшаются в одном и том же отношении, их длины стремятся к нулю, и поэтому пересечение всех многоугольников

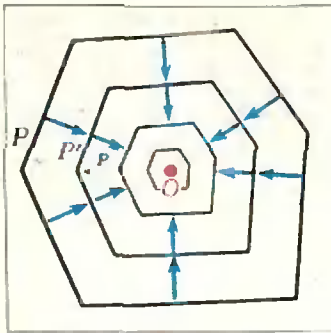


Рис. 6.

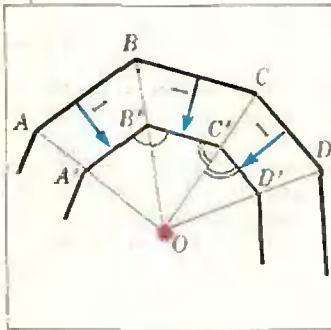


Рис. 7.

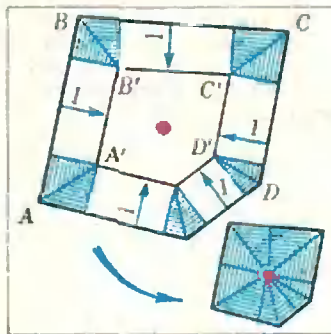


Рис. 8.

состоит из одной точки (рис. 6)\*). Обозначим ее через  $O$ . Каждая сторона многоугольника  $P'$  последовательно отодвигается на расстояния  $k, k^2, k^3, \dots, k^n, \dots$ , поэтому расстояние от каждой стороны до точки  $O$  равно одному и тому же числу — сумме бесконечной геометрической прогрессии

$$k + k^2 + k^3 + \dots + k^n + \dots = r.$$

Таким образом, окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  касается всех сторон многоугольника  $P'$ .

Заметим, что в приведенном доказательстве было несущественно, какие именно стороны соответствуют друг другу при подобии преобразовании  $f$ , переводящем  $P$  в  $P'$ . Между тем, в большинстве решений, присланных читателями, молчаливо предполагалось, что имеется в виду естественное соответствие: каждой стороне  $P'$  сопоставляется сторона  $P$ , которая получается из нее отодвиганием на единицу. Можно доказать такую лемму: если многоугольники  $P$  и  $P'$  (полученный из  $P$  отодвиганием сторон на 1) подобны — с каким угодно соответствием сторон (с «поворотом» или «симметричным отражением» порядка сторон), то всегда будет иметь место и подобие с естественным порядком сторон — гомотетия с коэффициентом  $k$  ( $0 < k < 1$ ). Доказательство, независимое от первого решения, мы приведем в конце, а пока дадим еще два решения задачи, опирающихся на эту лемму (то есть подразумевающих естественное соответствие сторон при подобии).

Второе доказательство. Пусть  $[AB]$  — сторона  $P$ ,  $[A'B']$  — соответствующая сторона  $P'$ ,  $O$  — точка пересечения  $(AA')$  и  $(BB')$ . Тогда (см. рис. 7)

$$\frac{|A'O|}{|AO|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'O|}{|BO|} = k.$$

Отсюда следует, что в той же точке  $O$  прямую  $BB'$  пересекает и прямая  $CC'$  ( $BC$  и  $B'C'$  — соответствующие стороны  $P$  и  $P'$ ), и так далее. Кроме того, очевидно, что прямые  $AA', BB', CC', \dots$  являются биссектрисами углов  $A', B', C', \dots$  многоугольника  $P'$ . Отсюда следует, что точка  $O$  служит центром окружности, вписанной в  $P'$ .

Третье доказательство. Разрежем «щель» между многоугольниками  $P$  и  $P'$  на прямоугольники высоты  $l$  с основаниями  $A'B', B'C', C'D', \dots$  и «ромбы» — четырехугольники, остающиеся у каждой вершины  $A, B, C, \dots$  (рис. 8). Очевидно, из этих ромбов можно составить один многоугольник, описанный около окружности радиуса единица, причем его углы соответственно конгруэнтны  $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \dots$ , а длины сторон равны разностям длин соответствующих сторон многоугольников  $P$  и  $P'$ , то есть равны  $(1-k)|AB|, (1-k)|BC|, \dots$ . Таким образом, наш многоугольник  $P'$  подобен многоугольнику, описанному около окружности радиуса 1, значит, и в него можно вписать окружность

(радиус ее будет равен, очевидно,  $r = \frac{k}{1-k}$ ).

Доказательство леммы. Будем для каждой стороны  $[AB]$  многоугольника  $P$  обозначать через  $[A'B']$  ту сторону  $P'$ , которая получается при отодвигании  $AB$ .

\* Тот факт, что это пересечение не пусто, легко вывести из аналогичного утверждения для числовой прямой: последовательность вложенных отрезков

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

всегда имеет общую точку (это утверждение или какое-либо ему эквивалентное при аксиоматическом введении действительных чисел принимается обычно за аксиому).

Пусть при подобии стороне  $[A_1B_1]$  соответствует  $[A_2'B_2']$ :  $[A_1B_1] \rightarrow [A_2'B_2']$ ,  $[A_2B_2] \rightarrow [A_3'B_3']$ , ...,  $[A_{r-1}B_{r-1}] \rightarrow [A_r'B_r']$ ,  $[A_rB_r] \rightarrow [A_1'B_1']$ . Тогда  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dots = \hat{A}_r = 2\alpha$  и  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dots = \hat{B}_r = 2\beta$ , а поэтому разность длин  $|A_iB_i| - |A_i'B_i'| = d$  одна и та же для всех  $i$  ( $d = \text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta$ ). Пусть  $k$  — коэффициент подобия,  $|A_iB_i| = x_i$ . Тогда

$$\begin{cases} x_1 - kx_r = d, \\ x_2 - kx_1 = d, \\ x_3 - kx_2 = d, \\ \dots \\ x_r - kx_{r-1} = d; \end{cases}$$

но, как нетрудно доказать, эта система (при  $0 < k < 1$ ) имеет только одно решение  $x_1 = x_2 = \dots = x_r = \frac{d}{1-k}$ . Таким образом, мы доказали, что для любой стороны  $A_1B_1$  многоугольника  $P$

$$|A_1'B_1'| = k|A_1B_1|,$$

то есть соответствующие друг другу (при отодвигании!) стороны многоугольников пропорциональны. Углы при отодвигании не меняются, поэтому подобие многоугольников с естественным соответствием сторон  $[AB] \rightarrow [A'B']$  доказано.

*Н. Б. Васильев*



**М284.** Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

Будем решать эту задачу, считая, что задано  $p=2k$  натуральных чисел, каждое из которых не больше  $p$  и сумма которых равна  $2p$ . Докажем, что из этих  $p$  чисел можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет равна  $p$ .

Пусть среди заданных чисел  $a_1, \dots, a_n$  какие-нибудь два, например числа  $a_1$  и  $a_2$ , — различны (если все числа одинаковы, то они все равны  $2$  и  $k$  из них дадут в сумме  $p=2k$ ). Составим новые  $p$  чисел:

$$\begin{cases} A_0 = a_1, \\ A_1 = a_2, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ \dots \\ A_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}. \end{cases}$$

Каждое из этих чисел меньше  $2p$ , но больше  $0$ . Среди остатков от деления чисел  $A_0, \dots, A_{n-1}$  на  $p$  найдутся либо нуль, либо же два равных остатка (так как остатков, как и чисел,  $p$ ). В первом случае  $A_m$ , соответствующее нулевому остатку, равно  $p$  (делится на  $p$ , больше  $0$  и меньше  $2p$ ). Во втором —  $A_m = A_k + p$  ( $k < m$ ). При этом  $m \neq 0$  и  $m \neq 1$ , так как числа  $A_0$  и  $A_1$  не превосходят  $p$ . В случае  $m=2$  либо  $A_0$  равно  $p$ , либо  $A_1$  равно  $p$ . В остальных же случаях  $A_m = A_k + a_{k+1} + \dots + a_m$ , откуда получаем, что  $a_{k+1} + \dots + a_m = p$ .

*С. В. Кожягин*



**М285.** Прямоугольный лист бумаги размерами  $a \times b$  разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых одна сторона имеет длину 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a$  и  $b$  целое.

Назовем прямоугольную полоску, являющуюся элементом указанного разбиения, блоком. Обозначим одну из сторон исходного прямоугольника длины  $b$  через  $B$ ; назовем блок горизонтальным, если его единичная сторона параллельна стороне  $B$ , и вертикальным — в противном случае. Обозначим прямую, параллельную  $B$ , отстоящую от  $B$  на расстояние  $x$  и пересекающую данный прямоугольник, через  $L_x$  (тогда  $x \leq a$ ). Будем считать, что прямая  $B$  — левая.

Если вертикальный блок расположен между прямыми  $L_i$  и  $L_{i+1}$  для некоторого целого  $i$ , то выкрасим его в красный цвет, остальные вертикальные блоки выкрасим в синий цвет, а все горизонтальные — в желтый. Сумму длин красных отрезков прямой  $L_x$  обозначим через  $K(L_x)$ , синих — через  $C(L_x)$  и желтых — через  $Ж(L_x)$ . (Если отрезок разделяет блоки двух цветов, будем считать, что он имеет цвет правого блока.) Очевидно, что  $Ж(L_x)$  — целое число для любого  $x$ . Покажем, что если перекрасить все синие блоки в желтый цвет, то сумма длин желтых частей любой прямой  $L_x$  останется числом целым. Для этого нам достаточно доказать, что сумма длин синих частей прямой  $L_x$  (то есть  $C(L_x)$ ) — целое число при любом  $x$ .

Обозначим всевозможные расстояния от синих блоков до  $B$  через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , причем

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq a-1.$$

Прежде всего, покажем, что можно перекрасить блоки  $C_1^{(1)}, \dots, C_{k_1}^{(1)}$ , отстоящие от  $B$  на расстояние  $\alpha_1$ . Пусть  $[a]$  — целая часть числа  $a$ . Так как  $\alpha_1$  — наименьшее среди всех расстояний синих блоков от прямой  $B$  и  $[\alpha_1] < \alpha_1$ , то  $K(L_{[\alpha_1]}) = K(L_{[\alpha_1]}) = b - Ж(L_{[\alpha_1]})$ . Поэтому  $C(L_{[\alpha_1]}) = b - K(L_{[\alpha_1]}) = b - Ж(L_{[\alpha_1]}) = Ж(L_{[\alpha_1]}) - Ж(L_{[\alpha_1]})$ , — целое число, и, значит, блоки  $C_1^{(1)}, \dots, C_{k_1}^{(1)}$  можно перекрасить, поскольку произвольная прямая  $L_x$  либо пересекает их все, либо не пересекает ни одного из них.

Точно так же доказывается, что из возможности перекрасить блоки  $C_1^{(s)}, \dots, C_{k_s}^{(s)}$ , отстоящие от  $B$  на расстояние  $\alpha_s$

для всех  $s \leq i-1$ , следует, что можно перекрасить блоки  $C_1^{(i)}, \dots, C_{k_i}^{(i)}$ . Теперь утверждение следует из принципа математической индукции:  $C(L_x)$  — целое при любом  $x$ .

Итак, у нас остались лишь красные и желтые блоки. Если теперь прямая  $L_{[a]}$  совпадает со стороной прямоугольника, то  $a$  — целое число. Если же нет — то

$$b = Ж(L_{[a]+\varepsilon}), \quad [a] + \varepsilon < a,$$

и так как  $Ж(L_x)$  — целое, то, значит, и  $b$  — целое.

Утверждение полностью доказано.

*И. Н. Ключова*

**Ф291.** Два одинаковых конденсатора  $A$  и  $B$ , каждый емкостью  $C$ , и катушка с индуктивностью  $L$  соединены, как показано на рисунке 9. В начальный момент ключ  $K$  разомкнут, конденсатор  $A$  заряжен до разности потенциалов  $U$ . Заряд конденсатора  $B$  и ток в катушке равны нулю. Определите максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа.

Если бы не было конденсатора  $B$ , то после замыкания ключа в контуре, содержащем конденсатор  $A$  и катушку индуктивности, возникли бы электромагнитные колебания. Из закона сохранения энергии можно было бы сразу найти максимальный ток.

В нашем случае сначала произойдет перераспределение заряда между конденсаторами, а потом в контуре установятся колебания. Попробуем это объяснить.

Участок цепи, состоящий из двух конденсаторов и соединительных проводов, тоже можно считать колебательным контуром. Но его индуктивность — индуктивность проводов — очень мала (по сравнению с  $L$ ), поэтому собственная частота колебаний в этом контуре будет очень большой (намного больше собственной частоты колебаний в контуре, который

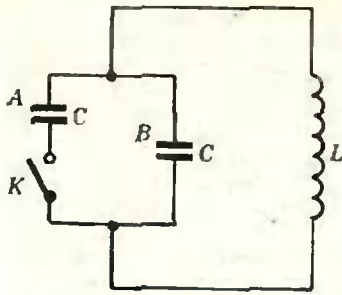


Рис. 9.

образуют конденсаторы и катушка индуктивности). Конечно, и этот контур обладает активным сопротивлением, но оно очень мало по сравнению, например, с индуктивным сопротивлением. Поэтому в течение некоторого времени после замыкания ключа колебания в контуре можно считать незатухающими. То есть в контуре, состоящем из конденсаторов и проводов, произойдет много колебаний тока за то время, пока ток в катушке еще можно будет считать равным нулю. Из-за сопротивления проводов колебания в этом контуре будут затухающими. Это приведет к быстрому установлению равновесия и перераспределению заряда поровну между конденсаторами (так как равны емкости конденсаторов). При этом часть энергии электрического поля заряженного конденсатора А перейдет в тепловую энергию.

Найдем, какая часть энергии останется в контуре после быстрого перераспределения заряда между конденсаторами. Первоначальный заряд конденсатора А был равен  $Q = CU$ . После перераспределения заряда между конденсаторами их заряды стали равны  $\frac{Q}{2}$ , а энергия  $\frac{Q^2}{8C} = \frac{CU^2}{8}$ . Следовательно, полная энергия, которая останется в контуре, равна  $\frac{CU^2}{8} + \frac{CU^2}{8} = \frac{CU^2}{4}$ .

(До замыкания ключа энергия в контуре была равна  $\frac{CU^2}{2}$ .)

Таким образом, в тепло переходит половина первоначальной энергии.)

Теперь рассмотрим контур, состоящий из конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке будет максимальным, когда конденсаторы полностью разрядятся и их энергия перейдет в энергию магнитного поля в катушке. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{4} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

Отсюда

$$I_{\max} = U \sqrt{\frac{C}{2L}}$$

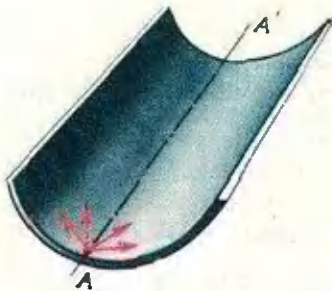


Рис. 10.

**Ф292.** Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей (рис. 10). Встретятся ли эти шарики?

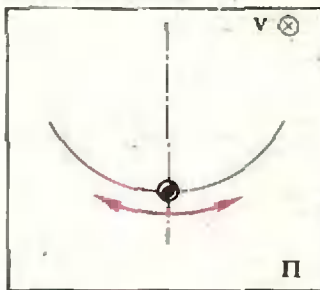


Рис. 11.

Рассмотрим движение шариков в системе координат, которая движется поступательно вдоль одной из своих осей, совпадающей с образующей желоба. Скорость системы  $v$  равна проекции скоростей шариков на образующую цилиндра. В этой системе координат все шарики в любой момент времени находятся в одной плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной к  $v$ . Будем считать, что шарики скользят без трения по боковой поверхности желоба, тогда в плоскости  $\Pi$  эти шарики движутся по кривой, показанной на рисунке 11, то есть совершают колебания.

Если амплитуды колебаний малы (малы начальные составляющие скоростей шариков, перпендикулярные к образующей желоба и касательные к его поверхности), то колебания шариков гармонические и их период не зависит от амплитуды. В этом случае через половину периода все шарики встретятся на той же образующей  $AA'$  желоба, с которой они начали свое движение.

Если же амплитуды колебаний шариков велики, то колебания не будут гармоническими, их периоды будут зависеть от амплитуды, и шарики будут попадать на образующую  $AA'$  в различные моменты времени. Это означает, что вместе шарики не встретятся.

**Ф293.** Марс во время противостояния находится на расстоянии  $l = 5,56 \cdot 10^{10}$  м от Земли и его угловой диаметр  $\alpha = 25''$ . Определить ускорение свободного падения на поверхности Марса, если известно, что максимальное угловое расстояние между центрами Марса и его спутника Фобоса  $\beta = 34''$ , а период обращения Фобоса вокруг Марса  $T = 2,76 \cdot 10^1$  с.

Ускорение свободного падения на поверхности Марса согласно закону всемирного тяготения и второму закону Ньютона равно

$$g_M = \gamma \frac{M}{R_M^2},$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Марса,  $R_M$  — его радиус.

Радиус Марса можно определить непосредственно из условия задачи (см. рис. 12):  $R_M = l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = l \frac{\alpha}{2}$  (так как  $\alpha$  мало, то  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ).

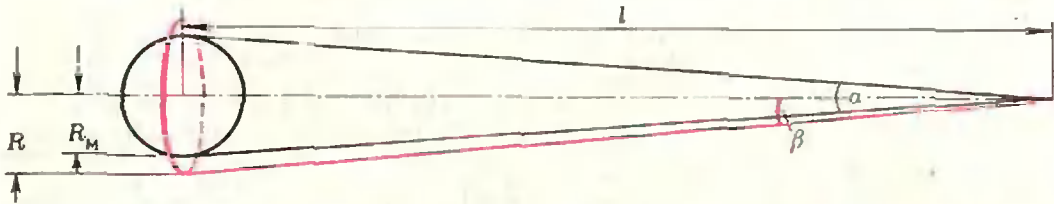


Рис. 12.

Чтобы найти массу Марса, рассмотрим движение его спутника Фобоса. Для простоты рассуждений будем считать, что спутник вращается по круговой орбите, радиус  $R$  которой равен (см. рис. 12)  $R = l \operatorname{tg} \beta = l\beta$ . Период обращения спутника равен  $T$ . Центробежное ускорение  $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$  спутнику сообщает сила тяготения

$F = \gamma \frac{mM}{R^2}$  ( $m$  — масса спутника). Поэтому  $a = \frac{F}{m}$ , или

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \gamma \frac{M}{R^2}, \text{ откуда}$$

$$\gamma M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^3 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (l\beta)^3.$$

Тогда окончательно

$$g_M = \gamma \frac{M}{R_M^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{(l\beta)^3}{(l\alpha/2)^2} = \frac{16\pi^2}{T^2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 l\beta.$$

Подставляя в эту формулу данные задачи и учитывая, что  $1'' = \frac{3,14}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ рад} \approx 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$ , получим

$$g_M = 3,64 \text{ м/с}^2.$$



**Ф294.** К некоторому прибору, находящемуся внутри камеры высокого давления, необходимо подводить тепло. Во время опыта меняется давление в камере, и это приводит к изменению сопротивления любой проволо-

Мощность, выделяющаяся на сопротивлении  $R_3$ , равна

$$P = I_3^2 R_3 = \frac{U_3^2}{R_3},$$

где  $I_3$  — ток и  $U_3$  — напряжение на сопротивлении  $R_3$ . Обозначим  $R_0$  общее сопротивление параллельно соединен-

ки, используемой в качестве нагревателя. На рисунке 13 показана схема, используемая в случае, когда необходимо, чтобы количество подводимого за одно и то же время тепла очень слабо зависело от давления. Сопротивление  $R_3$  — это обмотка нагревателя.  $R_1$  и  $R_2$  — некоторые постоянные сопротивления, которые находятся вне камеры высокого давления. При каком соотношении между  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  мощность, рассеиваемая на сопротивлении  $R_3$ , меняется меньше всего при изменении величины сопротивления  $R_3$ ?

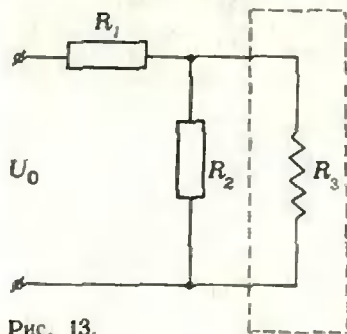


Рис. 13.

ных сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ ; тогда сопротивления  $R_1$  и  $R_0$  соединены последовательно и  $\frac{U_3}{R_0} = \frac{U_0}{R_1 + R_0}$ , или

$$U_3 = U_0 \frac{R_0}{R_1 + R_0}. \quad \text{Но } R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad \text{следовательно,}$$

$$U_3 = U_0 \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

и

$$P = \frac{U_0^2 R_2^2 R_3}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)^2} = \frac{U_0^2 R_2^2}{\left[ \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_3}} + \sqrt{R_3} (R_1 + R_2) \right]^2} \quad (*)$$

Исследуем полученное выражение. При  $R_3 = 0$   $P = 0$ . При  $R_3$ , стремящемся к  $\infty$  (то есть  $R_3 \gg R_1$  и  $R_3 \gg R_2$ ),  $P$  стремится к 0. Так как  $P(R_3)$  — непрерывная функция (это ясно из физических соображений), то при некотором значении  $R_3$  мощность максимальна. График зависимости  $P$  от  $R_3$  показан на рисунке 14. Из графика видно, что при одном и том же изменении  $R_3$  изменение величины  $P$  минимально как раз тогда, когда сама величина  $P$  максимальна \*). Таким образом, нам нужно найти, при каком значении  $R_3$  мощность максимальна, или, что то же самое, знаменатель в выражении (\*) минимален.

Как известно, для двух чисел  $a$  и  $b$  среднее арифметическое не меньше среднего геометрического:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ;  $a + b$  минимально и равно  $2\sqrt{ab}$  при  $a = b$ .

Произведение слагаемых  $\frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_3}}$  и  $\sqrt{R_3} (R_1 + R_2)$  не зависит от  $R_3$ , поэтому согласно сказанному выше знаменатель выражения (\*) минимален, а значит,  $P$  максимальна, если

$$\frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_3}} = (R_2 + R_1) \sqrt{R_3}, \quad \text{или } R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Именно при таком соотношении между  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  мощ-

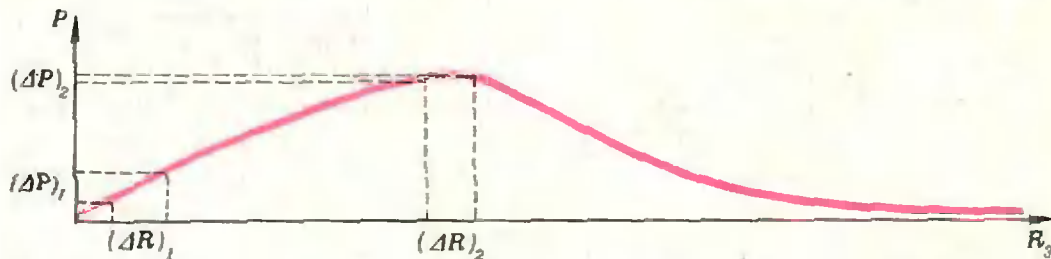


Рис. 14.

ность, выделяемая на сопротивлении  $R_3$ , меняется меньше всего при изменении величины сопротивления  $R_3$ .

\* Те, кто знаком с элементами высшей математики, знают, что, когда функция принимает максимальное (или минимальное) значение, скорость изменения функции (первая производная) равна нулю.

**Ф295.** Какова должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины в течение суток из-за притяжения Луны? Считать, что измерение производится в точке, которая лежит в плоскости орбиты Луны; вращением Земли пренебречь.

Под действием притяжения друг к другу Земля и Луна вращаются вокруг их общего центра масс. В системе отсчета, связанной с центром масс системы Земля — Луна, на тело, находящееся у поверхности Земли, действуют две силы — сила притяжения со стороны Земли  $F_3 = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}$  и сила притяжения со стороны Луны  $F_л = \gamma \frac{M_л m}{l^2}$ , где  $m$  — масса тела,  $M_3$  — масса Земли,  $M_л$  — масса Луны,  $R_3$  — радиус Земли и  $l$  — расстояние от тела до Луны. Сумма этих сил сообщает телу ускорение  $a = \frac{1}{m} (F_3 + F_л)$ .

Для того чтобы найти ускорение тела относительно Земли, необходимо учесть, что в нашей системе отсчета сама Земля движется с центростремительным ускорением, сообщаемым ей силой тяготения  $F_{3-л}$ , действующей на Землю со стороны Луны:  $a_3 = \frac{F_{3-л}}{M_3} = \gamma \frac{M_л}{l_0^2}$  ( $l_0$  — расстояние между центрами Земли и Луны).

Таким образом, ускорение свободного падения тела на Землю (ускорение относительно Земли) равно  $g = a - a_3$ . Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, то взаимное расположение тела, находящегося на поверхности Земли, Земли и Луны будет со временем меняться. Следовательно, будет меняться и ускорение свободного падения  $g$ . (Однако изменение ускорения  $g$ , связанное с тем, что вращающаяся Земля не является инерциальной системой отсчета, мы учитывать не будем.)

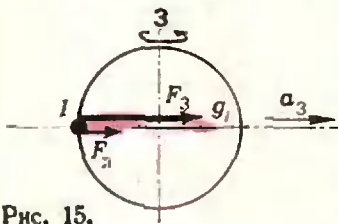


Рис. 15.

а)

В тот момент, когда Луна, Земля и тело расположены вдоль одной прямой и Земля находится между телом и Луной (рис. 15), силы  $F_3$  и  $F_л$  направлены в одну сторону и ускорение свободного падения равно по абсолютной величине

$$g_1 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} + \gamma \frac{M_л}{(l_0 + R_3)^2} - \gamma \frac{M_л}{l_0^2} = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} + \gamma \frac{M_л}{l_0^2} \frac{1 - (1+x)^2}{(1+x)^2},$$

где  $x = \frac{R_3}{l_0}$ . Так как  $x \ll 1$ , то  $1 - (1+x)^2 \approx 2x$  и, кроме того, можно пренебречь  $x$  по сравнению с 1 в знаменателе второго слагаемого. В результате получим, что

$$g_1 \approx \gamma \frac{M_3}{R_3^2} - 2\gamma \frac{M_л}{l_0^2} x.$$

Через полюс Земли вокруг своей оси, когда тело находится в точке 2 между Землей и Луной (рис. 16,

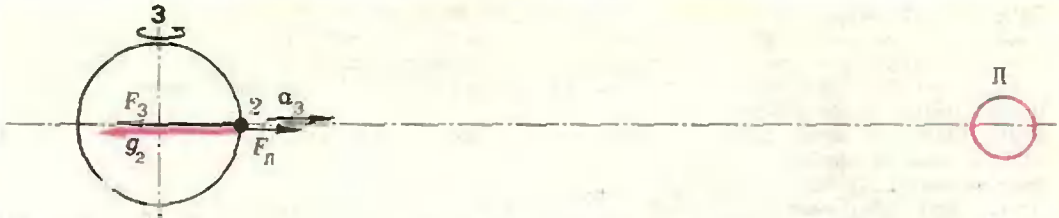


Рис. 16.

силы  $F_3$  и  $F_Л$  направлены в противоположные стороны и

$$g_2 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} - \gamma \frac{M_Л}{(l_0 - R_3)^2} + \gamma \frac{M_Л}{l_0^2} \approx \gamma \frac{M_3}{R_3^2} - 2\gamma \frac{M_Л}{l_0^2} x.$$

То есть ускорения тела в этих двух точках практически одинаковы:  $g_1 \approx g_2$ .

В те моменты, когда тело находится в точках 3 и 4, то есть через  $1/4$  и  $3/4$  оборота после начала отсчета, силы  $F_3$  и  $F_Л$  направлены так, как показано на рисунке 17. Ускорение свободного падения в точке 3 равно

$$g_3 = \frac{F_3}{m} + \frac{F_Л}{m} - a_3.$$

Сравним второе и третье слагаемые в этом выражении. Направления силы  $F_Л$  и ускорения  $a_3$  практически совпадают, а абсолютные величины

$$\text{слагаемых почти одинаковы: } \frac{F_Л}{m} = \gamma \frac{M_Л}{l_0^2 + R_3^2} \approx \gamma \frac{M_Л}{l_0^2} \text{ (так}$$

как  $R_3 \ll l_0$ ),  $a_3 = \gamma \frac{M_Л}{l_0^2}$ . Поэтому можно считать, что

величина ускорения свободного падения в точках 3 и 4 определяется только силой притяжения к Земле:

$$g_3 = g_4 = \frac{F_3}{m} = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}.$$

По мере удаления от точек 3 и 4 ускорение уменьшается.

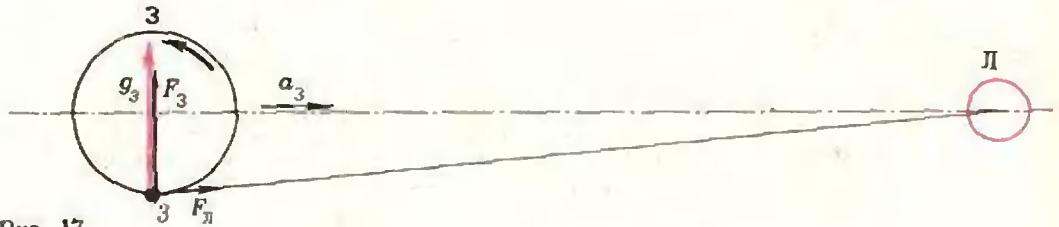


Рис. 17.

Таким образом, в точках 3 и 4 ускорение свободного падения максимально, а в точках 1 и 2 — минимально.

$$\text{Найдем отношение } \frac{\Delta g}{g_3} = \frac{g_3 - g_1}{g_3};$$

$$\frac{\Delta g}{g_3} = 2 \frac{M_Л}{M_3} x^3 \approx 10^{-7}.$$

Очевидно, именно такой должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины из-за притяжения тел Луной.

И. Ш. Слободецкий



# Использование неравенства Коши при решении задач

С. Т. Берколайко

В школьном курсе математики свойствам элементарных неравенств и методам их доказательства отводится значительное место. Однако на вступительных экзаменах в вузы многие абитуриенты с трудом применяют неравенства при исследовании элементарных функций и решении задач на максимум и минимум (преимущественно геометрического и физического содержания). Между тем, для решения подобных задач достаточно знать и, главное, уметь применять сравнительно несложные неравенства.

К числу таких неравенств относится, прежде всего, неравенство Коши: *среднее арифметическое двух положительных чисел  $a$  и  $b$  не меньше их среднего геометрического:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

Наряду с неравенством Коши абитуриентам полезно знать некоторые следствия из него, а именно:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad (2)$$

$$a^2+b^2 \geq 2ab, \quad (3)$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad (4)$$

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \quad (5)$$

(выведите их самостоятельно).

Как известно, в неравенстве (1) равенство достигается лишь при  $a=b$ . Следовательно, и неравенства (2)–(5) переходят в равенства лишь при  $a=b$ .

Неравенства (1)–(5) эквивалентны друг другу (при  $a > 0$ ,  $b > 0$ ), любое из них можно применять при решении задач, и, как показывает практика вступительных экзаменов, решение конкурсных задач на максимум и минимум легко находится именно с помощью этих неравенств. Рассмотрим ряд примеров.

**Задача 1.** *Найти наибольшее значение произведения двух переменных, сумма которых постоянна.*

Этот вопрос решает неравенство (4), утверждающее, что произведение двух положительных чисел не больше квадрата их среднего арифметического. Действительно, если  $a$  и  $b$  — две переменные,  $a+b=M$ , где  $M$  — некоторая постоянная, то при  $a \neq b$  согласно (4)  $ab < \left(\frac{M}{2}\right)^2$ , а при  $a=b$  неравенство (4) переходит в равенство  $ab = \left(\frac{M}{2}\right)^2$ .

Следовательно, при  $a=b$  произведение  $ab$  достигает наибольшего значения, равного  $\left(\frac{M}{2}\right)^2$ .

Аналогично, если требуется найти наименьшее значение суммы двух переменных, произведение которых постоянно, то применяется неравенство (2).

**Задача 2** (МГУ, мехмат, 1966). *Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали осно-*

вания, а площадь основания должна быть равна  $4 \text{ м}^2$ . При каких длинах сторон основания площадь поверхности постаumenta будет наименьшей?

Пусть  $x$  и  $y$  — длины (в метрах) сторон прямоугольника, лежащего в основании постаumenta. Тогда по условию задачи высота  $z$  постаumenta равна  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , а площадь его поверхности (в  $\text{м}^2$ )

$$S = 2(x + y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 8,$$

при этом  $xy = 4$ . Воспользовавшись неравенствами (2) и (3), получим  $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 4$ ;  $x^2 + y^2 \geq 2xy = 8$ , откуда  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{8}$ . Следовательно,

$$S \geq 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{8} + 8 = 8 + 16\sqrt{2} (\text{м}^2),$$

причем равенство достигается при  $x = y$ , поскольку периметр основания ( $2(x + y)$ ) и высота ( $\sqrt{x^2 + y^2}$ ) одновременно при  $x = y (=2)$  достигают наименьшего значения. Итак, наименьшая площадь поверхности будет у постаumenta, в основании которого лежит квадрат со стороной в  $2 \text{ м}$ .

**Задача 3** (МГУ, мехмат, 1966). Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной  $1 \text{ см}^2$ . Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна  $20 \text{ см}$ . При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

Пусть  $x$  и  $y$  — длины сторон прямоугольника (в сантиметрах), лежащего в основании параллелепипеда, а  $z$  — его высота. Тогда по условию  $xy = 1$ ,  $4x + 4y + 4z = 20$ , откуда  $x + y + z = 5$ .

Площадь поверхности коробки равна

$$S = 2(x + y) \cdot z + 2.$$

С учетом соотношения  $(x + y) + z = 5$  и неравенства (4) получим

$$(x + y) \cdot z \leq \left[ \frac{(x + y) + z}{2} \right]^2 = \frac{25}{4},$$

причем это неравенство обращается в

равенство лишь при  $x + y = z = 2,5$ . Таким образом, произведение  $(x + y)z$ , а вместе с ним и площадь поверхности коробки достигают наибольшего значения, если  $z = 2,5$  (см) и  $x + y = 2,5$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2,5, \\ xy = 1, \end{cases}$$

находим размеры коробки:  $2 \times 0,5 \times 2,5$  (см).

**Задача 4** (НГУ, 1968). Дан прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = a$ ;  $BC = b$ . Вокруг него описываются прямоугольники таким образом, что каждая сторона описанного прямоугольника проходит через одну из вершин прямоугольника  $ABCD$ . Найти описанный прямоугольник с наибольшей площадью и определить его площадь.

Пусть  $a$  и  $b$  — длины сторон данного прямоугольника (рис. 1),  $\alpha$  — угол между соответствующими сторонами данного и описанного прямоугольников. Тогда длины сторон описанного прямоугольника равны  $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ ,  $a \cos \alpha + b \sin \alpha$ , его площадь

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= (a \sin \alpha + b \cos \alpha) \times \\ &\quad \times (a \cos \alpha + b \sin \alpha) = \\ &= (a^2 + b^2) \sin \alpha \cos \alpha + ab. \end{aligned}$$

Здесь переменным является произведение  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ . Нам надо найти наибольшее значение этого произведения. Учитывая, что  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , применим неравенство (5):

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2}.$$

Равенство достигается лишь при  $\sin \alpha = \cos \alpha$ , то есть при  $\alpha = 45^\circ$  (так как по условию  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Следовательно, наибольшую площадь имеет тот описанный прямоугольник, стороны которого образуют со сторонами данного угол  $45^\circ$ . Нетрудно убедиться, что этот прямоугольник — квадрат, площадь его

$$S_{\text{наиб}} = \frac{1}{2} (a + b)^2.$$



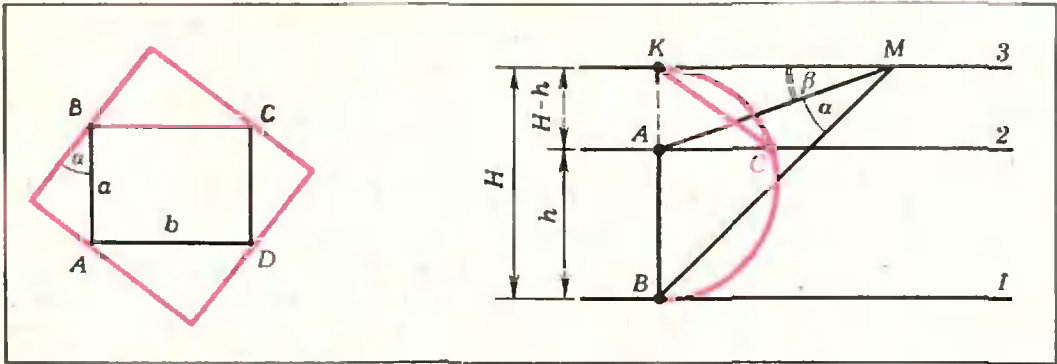


Рис. 1.

**Задача 5** (НГУ, 1968). Расстояние между двумя параллельными прямыми равно  $h$ . Третья прямая, параллельная данным, находится вне полосы между ними на расстоянии  $H$  от дальней. Отрезок  $AB$  перпендикулярен к прямым, а концы его лежат на первых двух прямых.

Найти на третьей прямой точку  $M$  так, чтобы  $\sphericalangle AMB$  был наибольшим.

Положение точки  $M$  на третьей прямой определяется, например, расстоянием от нее до точки  $K$  пересечения прямой  $AB$  с третьей прямой (рис. 2). Для решения задачи достаточно найти то значение  $x$ , для которого соответствующий угол  $\alpha = \sphericalangle AMB$  достигает наибольшей величины.

Введем вспомогательный угол  $\beta = \sphericalangle KMA$  и выразим с помощью него  $\operatorname{tg} \alpha$  в виде функции от  $x$ . Используя формулу тангенса разности двух аргументов и определение тангенса острого угла, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}[(\alpha + \beta) - \beta] = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{\frac{H}{x} - \frac{H-h}{x}}{1 + \frac{H(H-h)}{x^2}} = \frac{h}{x + \frac{H(H-h)}{x}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $\operatorname{tg} \alpha$  (а, следовательно, и  $\alpha$ ) достигает наибольшего значения, когда сумма  $x + \frac{H(H-h)}{x}$

Рис. 2.

достигает наименьшего значения. Поскольку  $x + \frac{H(H-h)}{x}$  постоянно, воспользуемся неравенством (2):

$$\begin{aligned} x + \frac{H(H-h)}{x} &\geq 2 \sqrt{x \frac{H(H-h)}{x}} = \\ &= 2 \sqrt{H(H-h)}. \end{aligned}$$

Искомое значение  $x$  является положительным корнем уравнения

$$\begin{aligned} x &= \frac{H(H-h)}{x}, \text{ то есть} \\ x &= \sqrt{H(H-h)}. \end{aligned}$$

Искомую точку теперь можно найти с помощью несложного построения: опишем на отрезке  $KB$  как на диаметре полуокружность, которая пересечет вторую прямую (проходящую через  $A$ ) в точке  $C$  (рис. 2), и отложим на третьей прямой отрезок  $KM_1 = KC$ ; точка  $M_1$  — искомая (докажите это самостоятельно).

Нетрудно заметить, что точка  $M_2$ , симметричная точке  $M_1$  относительно точки  $K$ , обладает тем же свойством, что и точка  $M_1$ . Итак, искомого точек — две:  $M_1$  и  $M_2$ .

**Задача 6** (МГУ, 1971). Автомобиль едет от пункта  $A$  до пункта  $B$  с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте  $B$  он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на  $a$  км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением  $a$  км/ч<sup>2</sup>.

Каково должно быть значение  $a$ , чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту  $B$ ?

Пусть автомобиль остановился в точке  $C$ , а через 3 часа был в точке  $D$ . Рассмотрим движение автомобиля на участке  $BC$ . По условию скорость автомобиля в пункте  $B$  равна  $v_B = 42$  км/ч; эта скорость является начальной на участке  $BC$ . Конечная скорость на рассматриваемом участке  $v_C = 0$ , поэтому время движения на участке  $BC$  (в часах)  $t_{BC} = \frac{42}{a}$ .

Используя формулу длины пути при равнопеременном прямолинейном движении, выразим  $BC$  и  $CD$  через параметр  $a$ :

$$BC = \frac{882}{a}, \quad CD = \frac{9a}{2}.$$

Таким образом,

$$BD = BC + CD = \frac{882}{a} + \frac{9a}{2}.$$

Так как произведение слагаемых  $\frac{882}{a}$  и  $\frac{9a}{2}$  постоянно, то полученная сумма — это следует из неравенства (2) — достигает наименьшего значения при

$$\frac{882}{a} = \frac{9a}{2},$$

откуда  $a = 14$  км/ч<sup>2</sup>. При этом  $BD = 126$  км.

### Упражнения

1 (МГУ, 1966). Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы с основанием в форме прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 50 см. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь 0,96 м<sup>2</sup>. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей?

2 (МГУ, 1966). В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольный треугольник с площадью, равной 2 м<sup>2</sup>, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

3 (МГУ, 1966). Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть

равна 2 дм<sup>2</sup>, а боковая поверхность 18 дм<sup>2</sup>. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей?

4 (МГУ, экон. ф-т, 1969). При каком действительном  $x$  выражение

$$y = \frac{2x - 1}{2x - x^2 - 4}$$

принимает наименьшее значение?

5 (МГУ, 1971). Мотоциклист выезжает из пункта  $A$  и движется с постоянным ускорением 12 км/ч<sup>2</sup> (начальная скорость равна нулю). Достигнув скорости  $v$  км/ч, он едет с этой скоростью 25 км, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта  $A$  с постоянной скоростью  $v$  км/ч.

При какой скорости  $v$  мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта  $A$ ?

6 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). При каких положительных  $x$  выражение

$$y = 2x + \frac{3}{x+1}$$

принимает минимальное значение?

7 (МИФИ, 1972). Найти объем наименьшего по объему конуса среди всех тех конусов, которые можно описать около шара радиуса  $R$ .

### Поправки

В «Кванте» №2 допущены следующие опечатки  
Страница 25, левая колонка, 14-я строка снизу  
Напечатано Следует читать  
... $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$  ... $A \Rightarrow B$

Страница 26, в задаче М309.  
Напечатано Следует читать  
 $x^{2n} + x + 1$   $x^{2n} + x^n + 1$

Страница 44, правая колонка  
рисунок 1 и рисунок 2 следует поменять местами  
Страница 47, левая колонка  
рисунок 5 и рисунок 6 следует поменять местами  
Страница 63, правая колонка, 2-я строка сверху  
Напечатано: Следует читать

$\rightarrow \rightarrow$   $\rightarrow \rightarrow$   
 $-(A-B) + \dots$   $-(A-B)^2 + \dots$

Страница 64, левая колонка, 5-я строка снизу  
Напечатано Следует читать  
заказ=59295 заказ=59295

## Г. Я. Мякишев      **Электростатическое поле**

Задачи раздела «Электростатика» имеют много общего с задачами на равновесие тел в механике, но есть между ними и принципиальные различия. Отличие электрических задач от механических состоит, прежде всего, в том, что для описания взаимодействия электростатических зарядов вводится особое понятие — электрическое поле, а также новые величины для количественной характеристики этого поля — напряженность и потенциал. Если электрическое поле создается неподвижными зарядами, то говорят об электростатическом поле и соответственно о напряженности и потенциале электростатического поля.

Цель данной статьи — обратить внимание читателей на наиболее трудные вопросы, связанные с понятием электростатического поля, и предостеречь от возможных ошибок.

### **Напряженность поля**

Прежде всего, нужно привыкнуть к обращению с этой величиной, научиться ее вычислять в различных случаях. В этом очень помогает принцип суперпозиции полей \*). Достаточно знать формулу для напряженности поля точечного заряда, для того чтобы вычислить напряженность поля заряженного тела с произвольно распределенным в про-

странстве зарядом. Заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов. Суммируя геометрически поля отдельных зарядов, можно найти напряженность поля в любой точке. Правда, вычисление этой суммы иногда оказывается весьма сложной математической задачей.

Не менее важно уметь свободно пользоваться понятием силовых линий, дающих качественную картину распределения поля в пространстве. На многие вопросы можно ответить, отчетливо представляя себе, как идут силовые линии.

Интересно заметить, что знание размерностей напряженности поля и электрического заряда позволяет в ряде случаев найти с точностью до числового коэффициента зависимость напряженности поля от расстояния.

Часто при решении задач на электростатику используется тот факт, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, и электростатическое поле не проникает сквозь проводник. Это означает, что геометрическая сумма полей всех зарядов в любой точке внутри проводника обращается в нуль. Отсюда можно делать выводы и о соответствующем распределении зарядов в пространстве.

Основной закон электростатики — закон Кулона — очень похож на закон всемирного тяготения. Это, конечно, облегчает решение ряда электростатических задач. Однако, нужно помнить и о различии этих

\*) См., например, статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

законов: наряду с притяжением разноименных зарядов существует и отталкивание одноименных зарядов. Поэтому при вычислении напряженности поля надо обязательно учитывать знаки зарядов.

Следует избегать также часто повторяемого неверного утверждения о том, что электрически нейтральная в целом система не создает вовсе электрического поля. Напряженность поля нейтральной системы, состоящей из положительных и отрицательных зарядов, вне системы не равна нулю. Правда, она убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем напряженность поля заряженного тела.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** *Может ли точечный электрический заряд, помещенный в электростатическое поле, находиться в состоянии устойчивого равновесия?*

Нет, не может. Для того чтобы, к примеру, положительный заряд находился в состоянии устойчивого равновесия, необходимо, чтобы при смещении заряда в любом направлении на него действовала сила, возвращающая заряд в положение равновесия. Следовательно, силовые линии поля должны сходиться в точке, где расположен заряд. Но силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. В точке же, где расположен рассматриваемый заряд, отрицательных зарядов нет, и, следовательно, силовые линии внешнего по отношению к заряду поля не могут сходиться в точке, где он расположен.

**Задача 2.** *Зная размерность напряженности электрического поля, найти (с точностью до числового коэффициента) напряженность поля бесконечной плоскости, находящейся в вакууме и имеющей плотность поверхностного заряда  $\sigma$ .*

Напряженность электрического поля в точке, отстоящей на расстоянии  $R$  от пластины, может зави-

сеть только от  $\sigma$  и  $R$ . Согласно принципу суперпозиции зависимость от  $\sigma$  должна быть линейной, то есть  $E = |\sigma| f(R)$ , где  $f(R)$  — неизвестная функция. Размерности напряженности  $E$  и плотности заряда  $\sigma$  равны соответственно

$$|E| = \frac{[q]}{[\epsilon_0][R^2]} \text{ и } [\sigma] = \frac{[q]}{[R^2]}.$$

Поэтому  $E = \frac{k|\sigma|}{\epsilon_0}$ , где  $k$  — безразмерный коэффициент. От расстояния напряженность поля не зависит. Точные расчеты дают для коэффициента  $k$  значение  $1/2$ .

**Задача 3.** *На расстоянии  $d$  от большой проводящей пластины находится точечный электрический заряд  $+q$ . С какой силой действует на него пластина?*

Под влиянием заряда  $+q$  на пластине появляются наведенные отрицательные заряды. Они распределяются по поверхности пластины таким образом, что результирующая напряженность электрического поля, созданного этими зарядами и зарядом  $+q$ , внутри пластины равна нулю (индуцированные положительные заряды уходят на удаленные края пластины, и их влиянием можно пренебречь). Поскольку пластина большая, величина суммарного наведенного заряда практически равна по модулю заряду  $+q$ . Справа от пластины (рис. 1) электрическое поле создается точечным зарядом  $+q$  и распределенным по поверхности пластины наведенным отрицательным зарядом  $-q$ . Слева электрическое поле отсутствует (эффект электростатической защиты).

Представим себе, что мы поместили слева от пластины на расстоянии  $d$  точечный отрицательный заряд  $-q$  (заряд-изображение). Он наведет на левой поверхности пластины положительные заряды, которые распределятся по ней точно так же, как отрицательные заряды на правой поверхности. При этом электрическое поле справа от пластины не

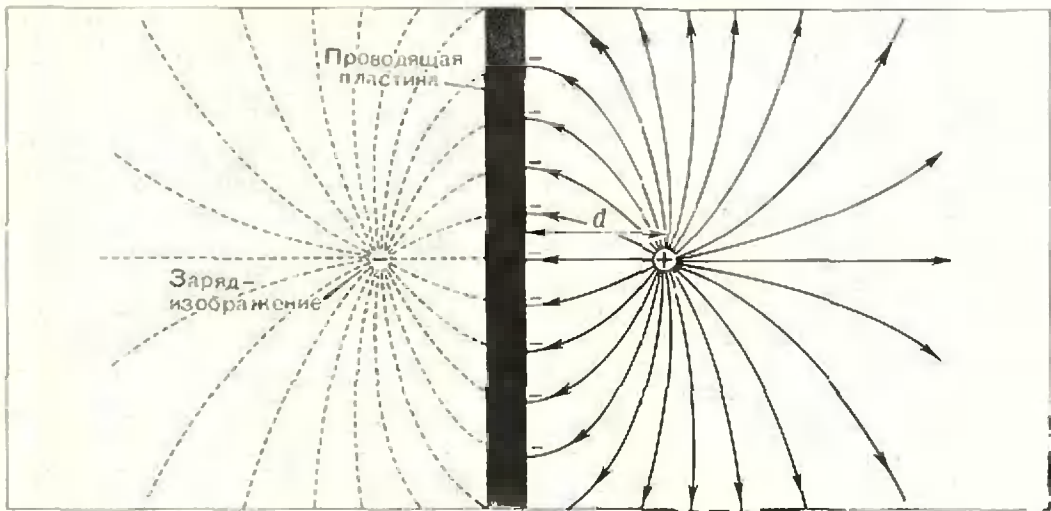


Рис. 1.

изменится (опять действует электростатическая защита).

Можно сказать, что справа от пластины поле создается двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$  и зарядами (отрицательными и положительными), индуцированными на обеих сторонах пластины. (В самом деле суммарная напряженность электрического поля от точечного отрицательного заряда и наведенных положительных зарядов равна нулю.) Если пластина тонкая (ее толщина мала по сравнению с расстоянием  $d$ ), то напряженность

поля наведенных зарядов вне пластины равна нулю.

Таким образом, оказывается, что справа от пластины электрическое поле, создаваемое зарядом  $+q$  и наведенными отрицательными зарядами, совпадает с полем, созданным двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$ , находящимися на расстоянии  $2d$  друг от друга (рис. 2). Это означает, что напряженность поля индуцированных зарядов в точке, где находится заряд  $+q$ , равна напряженности поля точечного заряда  $-q$ . Тогда искомая сила притяжения

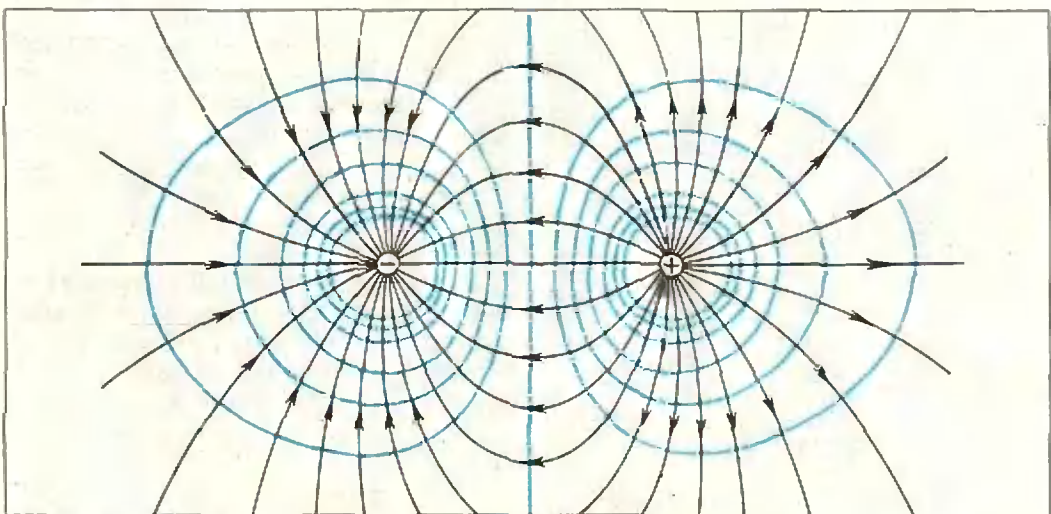


Рис. 2. Синим цветом показаны эквипотенциальные поверхности.

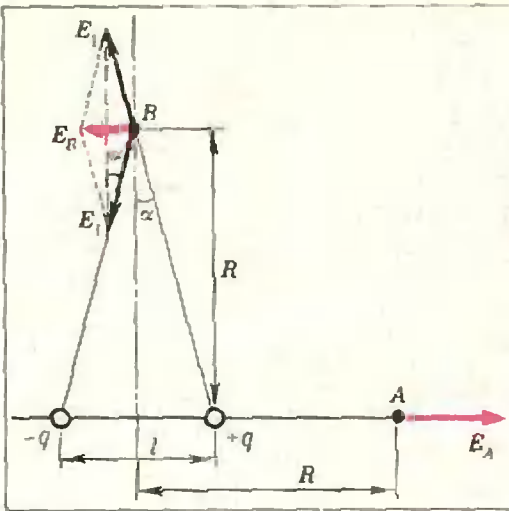


Рис. 3.

равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}.$$

**Задача 4. Свойства электрического диполя (системы из двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга) характеризуются его электрическим моментом  $p = ql$ .**

Найти напряженность поля электрического диполя с моментом  $p$  в точке, отстоящей от центра оси диполя на расстоянии  $R \gg l$ , в двух случаях:

- 1) точка лежит на прямой, проходящей через ось диполя;
- 2) точка лежит на прямой, перпендикулярной к оси диполя.

В первом случае, как это видно из рисунка 3, напряженность в точке A равна

$$E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(R-l/2)^2} - \frac{1}{(R+l/2)^2} \right\}.$$

Так как  $R \gg l$ , то

$$\frac{1}{(R-l/2)^2} - \frac{1}{(R+l/2)^2} \approx \frac{2l}{R^3}.$$

Следовательно,

$$E_A \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{R^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Во втором случае (см. рис. 3) напряженность поля, созданного каж-

дым из зарядов в точке B, равна по величине

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{R^2 + l^2/4}.$$

Суммарный вектор напряженности  $E_B$  направлен по оси диполя. Его величина равна

$$E_B = 2E_1 \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{ql}{(R^2 + l^2/4)^{3/2}} \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Заметим, что в обоих случаях напряженность убывает как  $\frac{1}{R^3}$ , то есть быстрее, чем напряженность точечного заряда (пропорциональная  $\frac{1}{R^2}$ ).

### Потенциал и потенциальная энергия

Самые большие трудности при решении электростатических задач обычно возникают при использовании понятия потенциала. Потенциал — энергетическая характеристика поля, и задачи с использованием понятия потенциала — это преимущественно задачи на закон сохранения энергии.

Применение закона сохранения энергии в механике вызывает значительные затруднения главным образом из-за сложности понятия потенциальной энергии взаимодействия тел\*). В электростатике мы встречаемся с новым видом потенциальной энергии. Причем из-за наличия зарядов противоположных знаков потенциальная энергия  $\Pi$  и, следовательно, потенциал  $\phi = \frac{\Pi}{q}$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

Наряду с взаимной потенциальной энергией заряженных тел каждое заряженное тело обладает собственной энергией, которая представляет собой энергию взаимодействия

\*) См. статью Г. Я. Мякишева «О законе сохранения энергии в механике», «Квант», 1974, № 3. (Прим. ред.)

частей заряженного тела друг с другом. Например, собственная энергия заряженного шара радиуса  $R$  равна  $\Pi = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$  ( $q$  — заряд шара).

При взаимодействии заряженных тел может изменяться не только их взаимная потенциальная энергия, но и собственная энергия каждого тела.

Необходимо иметь в виду, что потенциальная энергия и потенциал определяются с точностью до постоянной. Значение этой постоянной зависит от выбора нулевого уровня потенциальной энергии. Обычно начало отсчета потенциальной энергии выбирают таким, чтобы постоянная была равна нулю. Выбирать можно произвольно, но, выбрав нулевой уровень для данной задачи, в дальнейшем при решении задачи его уже менять нельзя.

Часто при решении задач используется тот факт, что все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Действительно, напряженность поля внутри проводника равна нулю, и при перемещении заряда внутри проводника работа не совершается. Типичная ошибка, которую довольно часто допускают, такова: выбирают постоянный потенциал внутри проводника равным нулю и забывают, что тогда уже нельзя считать потенциал заряженного тела на бесконечности нулевым (именно в бесконечности чаще всего выбирается нулевой уровень потенциальной энергии, а значит, и потенциала).

Теперь продолжим рассмотрение конкретных задач.

**Задача 5.** Чему равен потенциал в центре проводящей сферы радиуса  $R$ , несущей заряд  $q$ ?

Напряженность электрического поля внутри сферы равна нулю. Следовательно, разность потенциалов между любыми двумя точками внутри сферы или на ее поверхности равна нулю. Другими словами, потенциал в произвольной точке внутри сферы, а значит, и в центре сферы равен потенциалу поверхности сферы,

то есть

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

если потенциал на бесконечности считать равным нулю.

**Задача 6.** Положительный заряд  $+q_0$  равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса  $R$ . В центре кольца находится точечный заряд  $-q$ , масса которого  $m$ .

Заряду сообщается начальная скорость  $v_0$  вдоль оси кольца. Определить характер движения заряда в зависимости от величины начальной скорости. Кольцо неподвижно.

Полная энергия заряда в начальный момент равна сумме кинетической энергии и потенциальной энергии в электростатическом поле кольца:

$$E_{\text{пол}} = \frac{mv_0^2}{2} - \varphi_0 q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 R},$$

так как потенциал в центре кольца  $\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$  (это непосредственно следует из принципа суперпозиции).

При  $E_{\text{пол}} \geq 0$  заряд уйдет в бесконечность. Причем его скорость на бесконечно большом расстоянии будет равна нулю, если  $E_{\text{пол}} = 0$ . Если  $E_{\text{пол}} > 0$ , скорость заряда на бесконечно большом расстоянии от кольца равна

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 Rm}}.$$

Если же  $E_{\text{пол}} < 0$ , то заряд будет совершать периодическое движение вдоль оси кольца. Наибольшее расстояние  $r$ , на которое при этом удалится заряд от центра кольца, можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Отсюда

$$r = R \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi\epsilon_0 mv_0^2 R}{qq_0} - 1\right)^2} - 1}.$$

**Задача 7.** Два маленьких шарика радиуса  $r$  несут заряды  $q_1$  и  $q_2$ , различные по величине, но одинаковые по знаку. Шарики первоначально находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. Один из шариков закреплен. Вторым шариком, удаляясь под действием электростатических сил, приобретает максимальную кинетическую энергию  $K_1$ . Если перед началом движения второго шарика оба шарика на некоторое время были соединены проводником, то второй шарик, удаляясь, приобретает максимальную кинетическую энергию  $K_2$ , причем  $K_2 > K_1$ .

Определить количество теплоты, выделившейся в проводнике при соединении шариков, и выяснить, за счет какой энергии выделяется эта теплота и увеличивается кинетическая энергия второго шарика.

Согласно закону сохранения энергии в первом случае

$K_{01} + \Pi_{01} + \Pi_{0c} = K_1 + \Pi_1 + \Pi_{1c}$ , где  $K_{01}$  и  $\Pi_{01} + \Pi_{0c}$  — начальные,  $K_1$  и  $\Pi_1 + \Pi_{1c}$  — конечные значения кинетической и потенциальной энергий системы двух шариков. При этом  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_1$  — потенциальные энергии взаимодействия шариков, а  $\Pi_{0c}$  и  $\Pi_{1c}$  — их суммарные собственные энергии, одинаковые по величине. Считая потенциальную энергию взаимодействия при бесконечно большом расстоянии между шариками равной нулю и учитывая, что  $K_0 = 0$ , получим

$$K_1 = \Pi_{01} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

После соединения проводником заряды шариков становятся одинаковыми и равными  $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ . Начальная потенциальная энергия шариков изменяется. Кинетическая энергия теперь равна

$$K_2 = \Pi_{02} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

Нетрудно видеть, что действительно  $K_2 > K_1$ . Кроме того, в проводнике выделяется количество теплоты  $Q$ .

Однако, разумеется, полная энергия должна сохраняться. Увеличение кинетической энергии и выделение теплоты во втором случае происходит за счет уменьшения собственной потенциальной энергии заряженных шариков при их соединении.

С учетом собственной энергии шариков конечную энергию в первом случае можно представить в виде

$$E_1 = K_1 + \Pi_{1c},$$

где  $\Pi_{1c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{2r} + \frac{q_2^2}{2r} \right)$  — собственная энергия шариков. Конечную энергию во втором случае запишем так:

$$E_2 = E_1 = K_2 + \Pi_{2c} + Q,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{2c} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q^2}{2r} + \frac{q^2}{2r} \right) = \\ &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2)^2}{r}. \end{aligned}$$

Количество выделенного тепла равно

$$\begin{aligned} Q &= \Pi_{1c} + K_1 - \Pi_{2c} - K_2 = \\ &= \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right). \end{aligned}$$

#### Упражнения

1. В вершинах двух острых углов ромба, составленного из двух равносторонних треугольников со стороной  $a$ , помещены положительные заряды  $+q_1$ . В вершине одного из тупых углов находится положительный заряд  $+q_2$ . Определить напряженность электрического поля  $E$  в четвертой вершине ромба.

2. Два неподвижных заряда  $+q_0$  расположены на расстоянии  $a$  друг от друга. Вдоль оси симметрии системы этих зарядов может перемещаться третий точечный заряд  $-q$ , обладающий массой  $m$  (рис. 4). Считая смещение заряда  $-q$  от прямой, соединяющей заряды  $+q_0$ , малым по сравнению с  $a$ , определить период  $T$  колебаний заряда  $-q$ .

3. Зная равномерность напряженности электрического поля, найти (с точностью до числового коэффициента) напряженность поля бесконечно длинной нити, заряженной с линейной плотностью  $\tau$ .

4. Пространство между двумя бесконечными параллельными пластинами заполнено диэлектриком, заряженным с постоянной объемной плотностью заряда  $\rho$ . Расстояние между пластинами  $a$ . Найти зависимость напряженности электрического поля от расстоя-





Рис. 4.

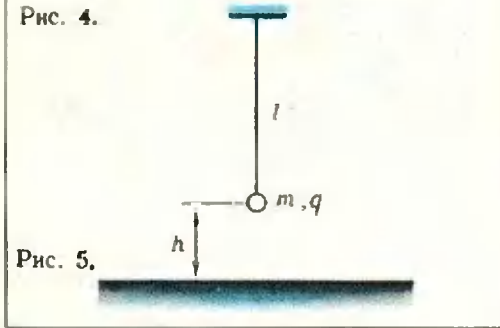


Рис. 5.

ния  $x$ , отсчитываемого от середины объемного заряда.

5. Шарик, имеющий заряд  $q$  и массу  $m$ , подвешен на нити длины  $l$  (рис. 5). На расстоянии  $h$  под ним находится проводящая плоскость. Найти период свободных колебаний маятника при малых углах отклонения нити от вертикали.

6. Три одинаковых точечных заряда  $q = -2 \cdot 10^{-8}$  к расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 10$  см. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы перенести один из них на середину противоположной стороны?

7. Три проводящие концентрические сферы имеют радиусы  $R$ ,  $2R$  и  $3R$  соответственно. Средняя сфера несет заряд  $+q$ . В ней проделано отверстие, через которое тонкой проволочкой соединяют внешнюю и внутреннюю сферы. Определить заряд  $q_1$  внешней сферы после соединения.

8. Два одноименных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами равно  $r_1$ , они имеют скорости  $v_1$  и  $v_2$ . До какого минимального расстояния  $r_2$  сблизятся заряды?

9. Маленький пластмассовый шарик массой  $m = 3 \cdot 10^{-15}$  кг падает в воздухе с постоянной скоростью  $v_1 = 10^{-4}$  м/с. Чему равен заряд шарика, если в электрическом поле с напряженностью  $E = 2,8 \cdot 10^5$  в/м, направленной вверх, он поднимается с установившейся скоростью  $v_2 = 2 \cdot 10^{-4}$  м/с? Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости шарика.

10. Две проводящие электрические сферы заряжены так, что внутренняя имеет потенциал  $\varphi_1$ , а внешняя  $\varphi_2$ . Какой потенциал будет иметь внутренняя сфера, если обе сферы соединить проводником?

## Из научного юмора, или электричество и жизнь

(Начало см. с. 18, 24)

Какую работу против сил поля должны совершить босоногие участники эксперимента, чтобы пройти по 5 м в противоположных направлениях? Для числовых расчетов можно взять площадь поверхности дисков, равную 5 дм<sup>2</sup>, а первоначальное расстояние между ними — 0,5 см.

Следует сделать еще несколько замечаний. Если мальчики босые, то есть у них хороший контакт с Землей, и если из-за дождя у них хороший контакт и с медными дисками, то конденсатор просто не удастся зарядить поскольку независимо от расстояния между дисками заряд будет сразу же стекать в Землю через мальчиков. При этом вероятность поражения электрическим током зависит от многих факторов, например от состояния кожи (из всех частей организма она обладает наибольшим электрическим сопротивлением), от емкости батареи. В данных условиях вероятность поражения током ничтожна: если принять, что сопротивление тела мальчиков составляет 10 ком (обычно же оно около 100 ком), то при напряжении батареи 12 в через мальчиков будет протекать ток порядка 1 ма. Такой ток практически не ощущается человеком.

Л. Н. Крыжановский

# Новосибирский государственный университет

Мы уже писали о Новосибирском государственном университете (см. «Квант», 1973, № 5). Расскажем теперь более подробно о механико-математическом факультете НГУ.

Выпускники этого факультета имеют глубокие знания в таких фундаментальных областях математики, как математический анализ, алгебра и логика, дифференциальные уравнения. Они могут принять активное участие в разработке новых направлений в технике и научных методов, необходимых для решения важных народнохозяйственных задач.

Механико-математический факультет НГУ имеет два отделения: отделение математики и отделение прикладной математики и механики.

Отделение математики готовит специалистов по следующим разделам: дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, теория функций и функциональный анализ, математическая логика, программирование, алгебра, геометрия и топология, теория вероятностей, математическая экономика, вычислительная математика.

Специализация студентов отделения математики концентрируется вокруг основных направлений современной математики.

Отделение прикладной математики и механики готовит специалистов по следующим разделам: гидродинамика, газовая динамика, теория упругости и пластичности, динамическая метеорология, математическая геофизика, вычислительная математика, теоретическая кибернетика.

Студенты отделения прикладной математики и механики получают широкое математическое образование и овладевают основами ряда прикладных дисциплин; они приобретают навыки в постановке и решении задач, возникающих в различных областях техники.

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена 1974 года по математике и физике на факультетах НГУ.

## Математика

Механико-математический, физический и экономический факультеты

### В а р и а н т 1

1. Решить неравенство

$$24x+2 \cdot 4-x^2-3 \cdot 2-x^2+2x+2+5 \geq 0.$$

2. Из точки вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Найти отношение оснований трапеции, если известно, что угол между касательными равен  $60^\circ$ .

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x.$$

4. При каких вещественных  $a$  система

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2, \\ x + y + z = 3a, \\ xy = z - \frac{4}{9} \end{cases}$$

имеет вещественные решения, удовлетворяющие условию  $xyz \geq 0$ ? Найти эти решения.

5. В треугольной пирамиде  $SABC$  ребро  $SA$  перпендикулярно к плоскости треугольника  $ABC$ ,  $AC=CB=a$ ,  $AS=AB=a\sqrt{2}$ . Через середину ребра  $AC$  проведена плоскость, перпендикулярная к ребру  $SB$ . Найти расстояние от вершины  $A$  до этой плоскости.

### В а р и а н т 2

1. Решить неравенство

$$5 \cdot 9^{2x+2} \cdot 3^{x^2-1} - 2^4 \cdot 3^{\frac{x^2}{2}+1} \cdot 9^x + 1 \leq 0.$$

2. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна к основанию  $AD$ ,  $BC=a$ ,  $AD=b$ ,  $a < b$ . На основании  $AD$  существует такая точка  $M$ , что  $MB$  перпендикулярно к  $AC$ , а  $MC$  перпендикулярно к  $BD$ . Найти высоту трапеции.

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x - \cos 3x}{1 + \sin 3x} = \frac{1}{2}.$$

4. Для каких вещественных  $m$  оба корня уравнения

$$2y^2 - (3m+1)y + m^2 + m = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$y^2 - my - 3m - 1 \geq 0?$$

5. В основании пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ . Ребро  $SB$  перпендикулярно к плоскости основания,  $SB=AB=AC=a$ . Через середину  $AB$  перпендикулярно к  $SC$  проведена плоскость. Найти площадь сечения.

Факультет естественных наук (специальности: химия, биология) и геолого-геофизический факультет

**В а р и а н т 3**

1. Решить неравенство  $(0,05)^{-\log_{(x-0,25)} x} \geq (2\sqrt{5})^{\log_{(x-0,25)} (4x-1)}$

2. Около окружности радиуса  $R$  описана равнобочная трапеция. Найти ее площадь, если известно, что расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно  $R\sqrt{3}$ .

3. Решить уравнение  $\sin x - \cos x = \sqrt{4 - 3(\sin x + \cos x)}$ .

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{c}. \end{cases}$$

5. Дан куб  $ABCA'B'C'D'$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AA'$ , а точка  $N$  — середина ребра  $A'B'$ . Плоскость, проведенная через точки  $M, N$  и  $C$ , разбивает куб на две части. Найти отношение объемов этих частей.

**В а р и а н т 4**

1. Решить неравенство  $(\frac{1}{8})^{\log_{(x+2)} |x-2|} \leq (2\sqrt{2})^{-\log_{(x+2)} (11-2x)}$ .

2. Угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ , причем  $AB = BC = a$ . Окружность  $O_1$  касается  $AB$  в точке  $A$ , а окружность  $O_2$  касается  $BC$  в точке  $C$ , кроме того, эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

3. Решить уравнение  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$ .

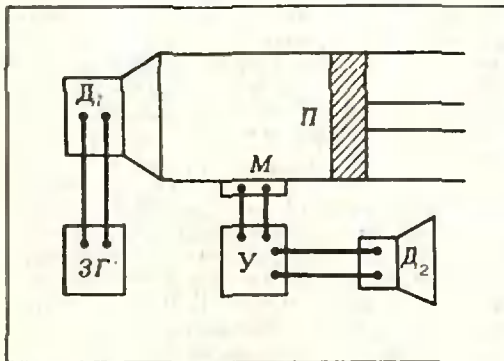


Рис. 1

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1, \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1 \end{cases}$$

( $a$  и  $b$  — действительные числа,  $a \neq b$ ).

5. Дан куб  $ABCA'B'C'D'$ . Точка  $M$  — центр грани  $AA'B'B$ , точка  $N$  — середина ребра  $C'C$ , точка  $K$  лежит на ребре  $DC$  и  $DK = \frac{1}{4} DC$ . Плоскость, проведенная через точки  $M, N, K$ , делит куб на две части. Найти отношение объемов этих частей.

**Физика**

На письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач. В первой задаче нужно было объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. Вторая и третья — легкие задачи, которые под силу большинству абитуриентов. Четвертая и пятая — задачи, требующие достаточно уверенных знаний основных физических законов и некоторой сообразительности. Шестой предлагалась задача повышенной трудности. Чтобы ее решить, надо уметь разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

На решение всех задач давалось 5 часов. Абитуриентам рекомендовалось решить вначале первые три задачи и подчеркивалось, что для получения высокой оценки не обязательно решение всех задач.

В приводимых ниже вариантах после условия каждой задачи указана в скобках ее максимальная оценка в баллах. (За неполное решение ставилась лишь часть баллов.) Для получения положительной оценки нужно было набрать не меньше пяти баллов. «Отлично» ставилось при 20 баллах и выше.

**В а р и а н т 1**

1. В цилиндрической трубе (рис. 1) возбуждаются гармонические звуковые колеба-

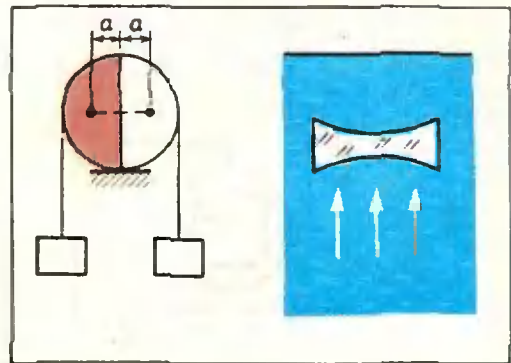


Рис. 2.

Рис. 3.

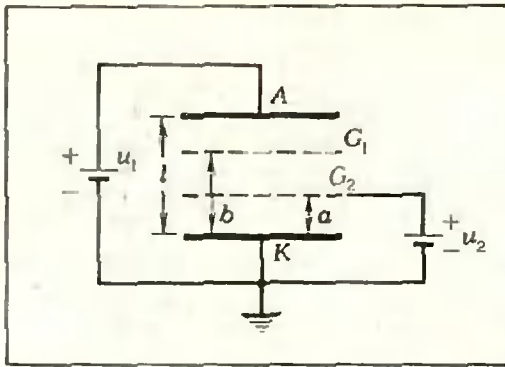


Рис. 4.

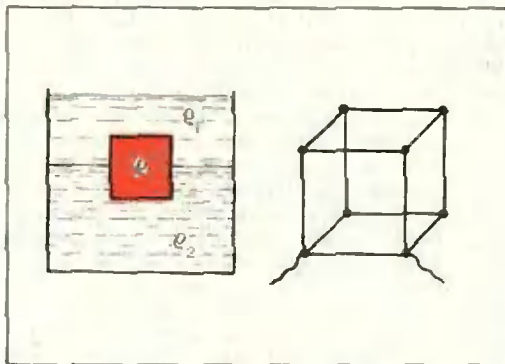


Рис. 5.

Рис. 6.

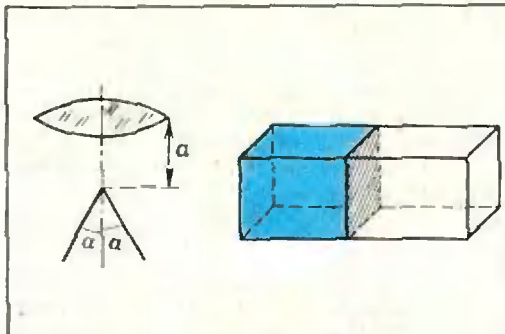


Рис. 7.

Рис. 8.

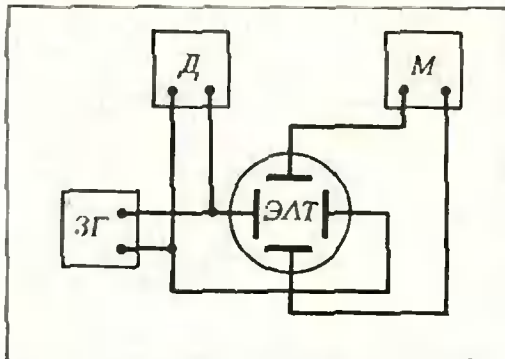


Рис. 9.

ния определенной частоты с помощью динамика  $D_1$ , установленного на одном из ее концов. Длина трубы изменяется при перемещении поршня  $P$ . На боковой стенке трубы находится микрофон  $M$ , сигнал с которого через усилитель  $У$  подается на динамик  $D_2$ . Объяснить, почему при перемещении поршня изменяется сила звукового сигнала динамика  $D_2$ . Можно ли этот эксперимент использовать для определения параметров колебательного процесса в трубе? Возможно ли определение свойств среды, в которой распространяются звуковые волны (скорость звука, плотность...)? (5)

2. Катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости обруч массы  $m$  сталкивается с вертикальной стенкой и прилипает к ней. Найти количество тепла, которое выделилось при столкновении, если центр обруча двигался со скоростью  $v$ . (4)

3. Цилиндр радиуса  $R$ , лежащий на подставке, разрезан пополам по вертикальной плоскости, проходящей через его ось (рис. 2). Вес каждой половины цилиндра  $P$ , а центры тяжести находятся на расстоянии  $a$  от оси цилиндра. Чтобы цилиндр не распался, через него перекинули нить с одинаковыми грузами на концах. Трение пренебрежимо мало. Найти минимальный вес грузов, не допускающий распада. (4)

4. Под водой находится полая двояковогнутая линза, имеющая в воде фокусное расстояние  $F$  (рис. 3). На нее снизу падает параллельный лучок света. Показатель преломления воды  $n$ . Линза расположена на расстоянии  $l$  ( $l < F$ ) от поверхности воды параллельно этой поверхности. Найти, на каком расстоянии от линзы соберутся лучи. Считать, что для любых лучей угол между лучом и оптической осью мал, то есть таков, что  $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha$ . (5)

5. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится насыщенный пар при температуре  $T$ . Определить, какая масса пара конденсировалась, если при вдвигании поршня совершена работа  $A$ . Молекулярный вес пара  $\mu$ , газовая постоянная  $R$ . (6)

6. В четырехэлектродной лампе с плоскими параллельными электродами заданы одинаковая площадь электродов  $S$  и расстояния от катода  $K$  до: анода  $A - l$ , сетки  $G_2 - a$ , сетки  $G_1 - b$ . Анодное напряжение  $u_1$ , между сеткой  $G_2$  и катодом  $K$  напряжение  $u_2$  (рис. 4). Найти заряд на сетке  $G_1$ , когда ток через лампу прекратится. (8)

В а р и а н т 2

1. См. задачу 1 из варианта 1.

2. Сосуд заполнен двумя несмешивающимися жидкостями с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (рис. 5). На границе раздела жидкостей плавает куб с длиной ребра  $l$ . Найти глубину погружения куба в жидкость с плотностью  $\rho_2$ . Плотность куба  $\rho$  ( $\rho_2 > \rho > \rho_1$ ). (3)

3. Найти сопротивление между соседними вершинами проволочного куба (рис. 6).

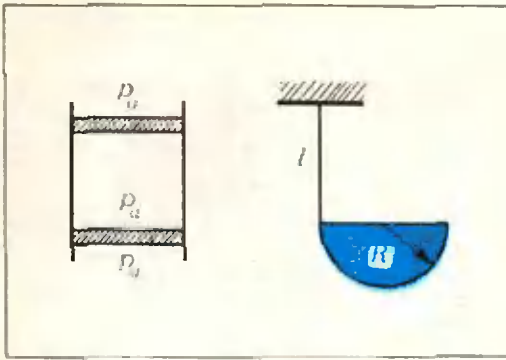


Рис. 10.

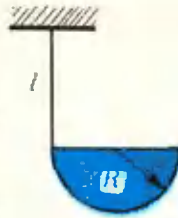


Рис. 11.

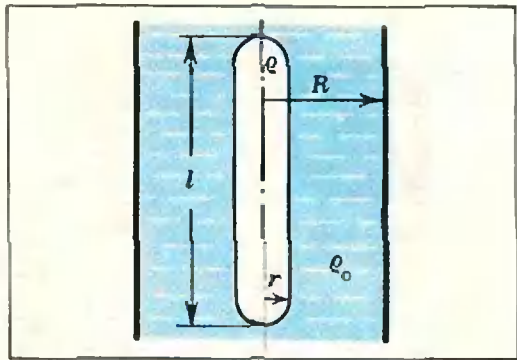


Рис. 12.

Сопrotивление каждого из ребер равно  $R$ . (4)

4. Острие конуса с углом  $2\alpha$  рассматривают через лупу с фокусным расстоянием  $F$ , расположенную на расстоянии  $a$  от вершины конуса ( $a < F$ ) (рис. 7). Каким виден угол конуса через лупу? Ось линзы проходит через ось симметрии конуса. (6)

5. В прямоугольном сосуде длиной  $2l$  с непроницаемыми стенками находится слева тяжелая жидкость (например, ртуть), отделенная подвижным тонким поршнем от воздуха в правой части сосуда (рис. 8). В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объем сосуда пополам. На сколько смещается поршень вправо, если абсолютная температура системы уменьшается в три раза? Тепловым расширением ртути и стенок сосуда, а также трением пренебречь. (7)

6. Две частицы с массами  $m$  и  $M$  и противоположными зарядами под влиянием взаимного электрического притяжения движутся по окружностям. Скорость частицы с массой  $m$  мгновенно увеличивают, не изменяя ее направления. В какое минимальное число раз нужно увеличить скорость, чтобы частицы после этого разлетелись неограниченно далеко друг от друга? (8)

### В а р и а н т 3

1. Собрана экспериментальная установка, схема которой приведена на рисунке 9. От генератора  $ЗГ$  звуковых частот синусоидальное напряжение подается на динамик  $Д$  и на горизонтально отклоняющие пластины электроннолучевой трубки  $ЭЛТ$ . На вертикально отклоняющие пластины  $ЭЛТ$  подается сигнал с микрофона  $М$ , который является приемником звуковых колебаний, возбуждаемых динамиком  $Д$ . Объяснить причину изменений, наблюдаемых на экране  $ЭЛТ$  при перемещении микрофона  $М$  относительно динамика  $Д$ . Нельзя ли использовать этот эксперимент для определения скорости звука? (5)

2. Светящаяся лампочка висит на высоте  $h$  над точкой стола  $O$ . На каком расстоянии от точки  $O$  освещенность стола в  $n$  раз меньше, чем в точке  $O$ ? (3)

3. Два электропроводящих невесомых поршня площади  $S$  образуют плоский конденсатор, заполненный воздухом при атмосферном давлении  $p_0$  (рис. 10). Во сколько раз изменится расстояние между поршнями, если их зарядить разноименными зарядами  $Q$ ? Система хорошо проводит тепло. Трением можно пренебречь. (5)

4. На горизонтальной поверхности расположены закрепленный заряд  $Q$  и на расстоянии  $r_0$  от него масса  $m$  с одноименным зарядом  $q$ , которая может перемещаться вдоль поверхности с коэффициентом трения  $k$ . В начальный момент масса  $m$  покоилась, а затем начала двигаться под действием закрепленного заряда. На каком расстоянии от заряда  $Q$  она остановится? Ускорение силы тяжести  $g$ . (6)

5. Половник с тяжелой жидкостью аккуратно подвесили за конец ручки. Черпалка половника — полусфера радиуса  $R$ , а ручка, касательная к полусфере, имеет длину  $l$  (рис. 11). Пренебрегая весом половника, найти, какой объем жидкости останется в половнике. (6)

6. В вертикальной трубе радиуса  $R$ , заполненной жидкостью плотности  $\rho_0$ , находится цилиндр радиуса  $r$  и длины  $l$ , причем  $l \gg R$  (рис. 12). Плотность цилиндра  $\rho$ . Пренебрегая влиянием концов цилиндра, определить скорость и ускорение в зависимости от пройденного цилиндром расстояния  $h$ , если в начальный момент цилиндр покоился. Ускорение силы тяжести  $g$ . Тепловыми потерями пренебречь. (9)

Г. В. Меледик,  
А. И. Ширинов



РЕЦЕНЗИИ,  
БИБЛИОГРАФИЯ

## Школьникам о современной физике

Тот, кто любит физику и хочет избрать физику своей профессией, должен много знать и много уметь. Решая задачи, работая в физической лаборатории, школьник изучает то, что называется школьным курсом физики. Но всегда хочется узнать не только о том, что есть в школьных учебниках, но и то, над чем работают физики в своих лабораториях.

Прежде всего, в этом может помочь научно-популярная литература, особенно если она написана учеными, которые сами активно занимаются изучением природы. Пусть в их рассказе будет не все понятно, зато можно быть уверенным в том, что читателю не будут сообщены ошибочные, неверные сведения, ошибочные, например, потому, что в последнее время изменились взгляды ученых или же появились сообщения о новых экспериментальных фактах.

По таким книгам или статьям нельзя научиться решать задачи; не следует и пытаться вступать в споры с автором, стараясь придумать новую теорию. Обычно в них излагаются только конечные результаты, и поэтому почти невозможно понять, почему теории явлений в современной физике не имеют (почти никогда) разных вариантов,

почему физики так уверены в правильности своих построений. Чтобы это понять, надо знать очень много и почувствовать, сколь много требований ставит природа перед теорией и как много самых неожиданных следствий вытекает из любых изменений теории. Поэтому только те, кто много работал в науке и на себе испытал всю сложность переплетений явлений природы, могут оценить значение и, конечно, достоверность теоретических объяснений того, что обнаруживает опыт.

Именно такие авторы написали статьи, вошедшие в книгу, которой открывается новая серия «Школьникам о современной физике»<sup>\*</sup>). Эта книга включает в себя шесть статей; все они написаны известными советскими физиками.

Первая статья называется «Современная астрофизика». Автор ее — академик, лауреат Ленинской премии В. И. Гинзбург — рассказывает о новых разделах астрономии — гамма-астрономии, возникшей в последние несколько лет, и рентгеновской астрономии, родившейся немного раньше. В статье рассказывается о нейтронных звездах, пульсарах и черных дырах, о новых гипотезах эволюции Вселенной.

Статья «Всемирные тяготение и гравитационные волны» написана доктором физико-математических наук В. Б. Брагинским и кандидатом физико-математических наук В. Н. Руденко. В этой статье идет речь о том, как можно зарегистрировать гравитационные волны, которые приходят к нам из глубин нашей галактики, рассказывается об экспериментах, которые пока (вопреки первым утверждениям) не дали никаких результатов. Эта статья о том, как обнаруживают эффекты,

которые находятся сейчас у самой границы наших возможностей.

В статье кандидата физико-математических наук В. А. Угарова «Принцип относительности и специальная теория относительности» коротко, но ясно рассказано об основных идеях теории относительности.

Очень интересна статья доктора физико-математических наук В. Б. Берестецкого «Тяжелый электрон». В ней подробно рассказано об одной из элементарных частиц — о мюоне, или мюоне, как его сейчас называют. Эта частица с массой, примерно в 200 раз большей массы электрона, очень похожа по своим свойствам на электрон, но она «живет» лишь две миллионные доли секунды (в покое).

Доктор физико-математических наук И. С. Шапиров в статье «Механизм ядерных реакций» говорит о том, как физики расширяют процессы, происходящие в атомных ядрах, как из большего количества опытов выбирается и систематизируется информация о ядерных силах и ядерных реакциях.

Последняя статья книги «Управляемый термоядерный синтез», написанная доктором физико-математических наук, лауреатом Ленинской премии М. С. Рабиновичем, посвящена проблеме практического применения физических открытий нашего века. Вопрос об использовании энергии ядерного синтеза очень сложный. В статье обсуждаются все аргументы, которые привели физиков к уверенности в успешном практическом завершении идеи «термояда».

Издательство «Просвещение» предполагает выпустить еще несколько сборников «Школьникам о современной физике» (сейчас готовится к печати второй сборник).

Д. Бородин

<sup>\*</sup>) Школьникам о современной физике. Классическая физика. Ядерная физика. М., «Просвещение», 1974.

«Квант» для младших школьников

## Задачи

1. Четыре юных филателиста Митя, Толя, Саша и Петя купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили советские марки, один — болгарские, а один — чешские. Известно, что Митя и Толя купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили и Митя с Сашей, Петя с Сашей, Петя с Митей и Толя с Сашей. Кроме этого известно, что Митя купил не болгарские марки. Определить, марки каких стран купил каждый из них.

2. Почему при прыжках в воду надо стараться «войти» в воду вертикально?

3. Пусть  $x$  — сумма кубов десяти последовательных натуральных чисел, а  $y$  — сумма этих же натуральных чисел. Доказать, что  $x^2 - y^2$  делится на 300.

4. Два сосуда одинаковых объемов доверху наполнены теплой водой. Чтобы остудить воду, один сосуд ставят на лед, а на другой сосуд сверху кладут большой кусок льда. В каком сосуде вода остынет скорее?

5. Я моложе своего деда во столько же раз, во сколько старше своей сестры. Сколько мне лет, если моей сестре еще нет семи лет, а мне вместе с дедом уже 84 года?

Рисунки Э. Назарова





Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков, и ее правила неоднократно менялись. Однако с точки зрения математики движение шахматных фигур и форма доски имеют весьма условный характер. Существует множество самых разнообразных игр на прямоугольных досках, теория которых занимает значительное место в математической литературе. Одних только шашечных игр известно больше десятка: русские, стоклеточные, шашки Ласкера (см. «Квант», 1970, № 4), поддавки, уголки и другие. Даже современные шахматы имеют много разновидностей. Например, М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971) рассказывает о японских шахматах (соги), китайских (цюнь ки) и корейских (тьян кеуи). Сейчас мы остановимся на некоторых играх и задачах (содержащих математические элементы), в которых доска или правила игры отличаются от обычных.

### До первого шаха

В этой игре все как в настоящих шахматах, только побеждает не тот, кто «первым» дает мат, а тот, кто первым объявляет шах. При обычной начальной позиции белые форсированно побеждают, причем не позднее пятого хода:

1. Кb1—с3. Грозит выпад конем на e4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ: 1... e7—e6. Теперь после 2. Кс3—e4

Кре8—e7 второй конь с решающим эффектом вступает в игру: 3. Kg1—f3 Фd8—e8 4. Kf3—e5 и шах следующим ходом.

Чтобы «оживить» игру, следует каким-либо образом изменить начальную позицию, например, передвинув белую пешку с c2 на c3, а черную с c7 на c6. Теперь невозможно 1. Кс3, а значит, и весь указанный вариант. Форсированного выигрыша уже не видно, например: 1. Фb3 d5! 2. Фb4 Фd6! 3. Фа4 Cd7 4. Фh4 Kf6, и черный король надежно защищен.

### Двухходовые шахматы

В этой игре каждый ход белых и черных состоит из двух обычных. По-видимому, она ничуть не проще настоящих шахмат. Тем удивительнее, что удается доказать следующий неочевидный факт: *при правильной игре в двухходовые шахматы белым, по меньшей мере, гарантирована ничья.*

Вот доказательство, приведенное в некоторых источниках. Предположим противное: пусть при наилучшей игре обеих сторон белые проигрывают. После 1. Кb1—с3—b1 сохраняется начальная позиция, а первый ход уже принадлежит черным. Фактически теперь черные играют белыми и, по предположению, проигрывают. Противоречие.

Это доказательство не совсем точно. После первого хода белых позиция действительно повторяется, но ситуация иная! Так, после 1... Kg8—f6—g8 2. Кb1—с3—b1 белые еще не могут требовать ничью, а черные могут, поскольку 2... Kg8—f6—g8 приводит к троекратному повторению исходной позиции при ходе белых. Таким образом, нельзя



считать, что после 1.Кb1 — c3 — b1 «черные играют белыми» — возможности сторон разные. Кстати, аналогичный пример можно привести и на правило 50 ходов.

Приведем теперь строгое доказательство. По-прежнему считаем, что черные при безукоризненной игре обеих сторон выигрывают. Будем играть одновременно на двух досках. На первой пойдем 1.Кb1 — c3 — b1, а ответный ход черных воспроизведем на второй доске со стороны белых. Затем ответ черных на второй доске повторим на первой за белых, ход черных на первой — за белых на второй и т. д. По нашему предположению, черные выигрывают и, значит, наступит момент, когда на первой доске своим очередным ходом они объявят мат белому королю. Но тогда на второй доске при повторении этого хода за белых возникнет позиция, в которой мат получает черный король! Но ведь черные и на второй доске играли безошибочно — противоречие.

Приведенное доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не выяснили, как им нужно играть. Более того, если будет найден форсированный выигрыш за белых (как, например, в игре «до первого шаха»), то тогда, очевидно, первый ход 1.Кb1 — c3 — b1 проигрывает. Таким образом, не исключено, что наше доказательство беспроигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

### Шахматы без цугцванга

Если в обычной партии возникает такая позиция, что любой наш ход проигрывает, то мы говорим о ц у г ц в а н г е (если проигрывает и любой ход партнера, то цугцванг взаимный). Шахматы без цугцванга отличаются от обычных добавлением одного хода — хода на месте. В них цугцванга не бывает, так как всегда можно передать очередь хода партнеру.

Приведенное выше доказательство того, что при правильной игре белым гарантирована ничья, полностью проходит и для шахмат без цугцванга. Однако, в отличие от двухходовых шахмат, поиск непосредственно мата здесь безнадежен! Напомним, что в настоящих шахматах, где шансы белых, судя по статистике, заметно выше, вовсе не доказано, что даже при наилучшей игре им обеспечена хотя бы ничья.

Среди студентов мехмата МГУ популярностью пользуется следующая игра в крестики и нолики. На клетчатой бумаге произвольной формы (хоть «бесконечной») двое по очереди ставят крестики и нолики.

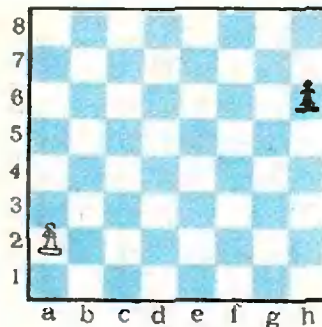


Рис. 1. Эндшпиль в поддавки.

Побеждает тот, кто первым ставит нять своих значков подряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Аналогично двойным шахматам и шахматам без цугцванга, можно доказать, что и здесь начинающий при безупречной игре не проигрывает. Правда, доказательство в данном случае сложнее, чем в шахматных играх.

### Поддавки

Эта игра более популярна в шашках, однако и ее шахматный вариант весьма интересен. Победителем в ней становится тот, кому удастся отдать все свои фигуры. Взятие в этой игре обязательно (в том числе и короля, которого можно ставить под бой), а если возможно несколько взятий, то выбор произволен. Кстати, гроссмейстер Д. Бронштейн в шахматные поддавки играет не менее охотно, чем в настоящие шахматы.

Теория поддавок довольно оригинальна и совершенно не похожа на законы обычных шахмат. Рассмотрим простейший эндшпиль (рис. 1). На доске всего две пешки, но посмотрите сколько тонкостей содержит позиция. 1. a2—a3! Но не 1. a4, так как белая пешка должна превратиться позже черной. 1...h6—h5 2. a3—a4 h5—h4. 3. a4—a5 h4—h3 4. a5—a6 h3—h2 5. a6—a7 h2—h1! Именно ладья, при других превращениях черной пешки (в ферзя, слона или коня) белые ставят ферзя, которого отдают сразу или на следующем ходу. 6. a7—a8C!! Только так, иначе черные легко отдадут свою ладью. Теперь на любой ход черной

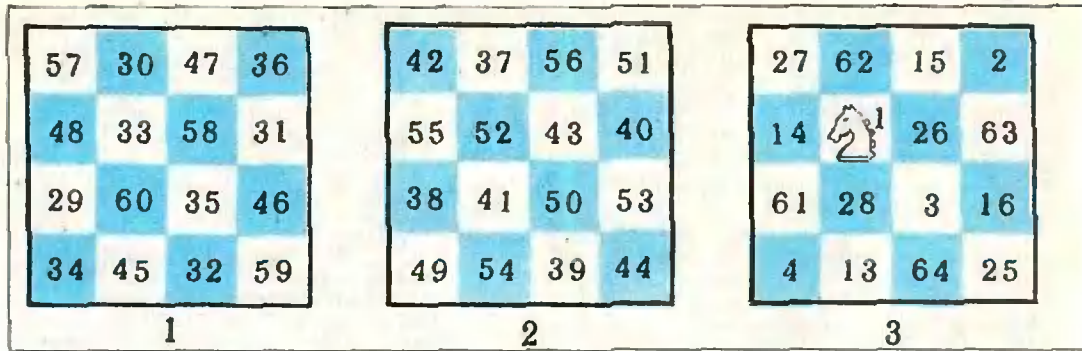


Рис. 2. Маршрут коня по всем полям объемной доски  $4 \times 4 \times 4$ .

ладьи следует 7.  $\text{Ca8-h1!}$ , и белые избавляются от слона.

Предлагаем вам самостоятельно оценить одно окончание в игре в поддавки и решить один этюд.

**Упражнение 1.** У белых пешка на d7, а у черных конь на f5 (других фигур на доске нет). Чем закончится игра в поддавки:

- при ходе белых;
- при ходе черных?

**Упражнение 2** (Х. Клювер и К. Фабель). Белый король на f3, у черных две фигуры — король на d7 и ферзь на c8. Белые начинают и проигрывают (то есть выигрывают в поддавки).

### Шахматы на прямоугольной доске

Многочисленные игры и задачи возникают при переходе к прямоугольным доскам  $m \times n$  при различных значениях  $m$  и  $n$ . Большинство известных шахматно-математических задач и головоломок о движении фигур, маршрутах, расстановках, силе фигур нетрудно перенести и на такие доски (см. «Квант», 1971, №№ 8, 10; 1973, № 1; 1974, № 6). Можно играть также на бесконечной и проективной шахматной доске (см. «Квант», 1974, № 3). Все эти доски, как и привычная шахматная доска, — плоские.

### Объемные шахматы

В них играют на трехмерной доске, представляющей собой параллелепипед  $m \times n \times k$ , единичные кубики которого образуют поля доски.

Хорошо известна задача, которой занимался Эйлер: обойти конем все поля доски  $8 \times 8$ , посетив каждое из них по одному разу (см. «Квант», 1971, № 9). Рассмотрим аналогичную задачу на объемной доске, состоящей, как и обычная, из 64 полей (кубиков): *обойти конем все поля объемной шахматной доски  $4 \times 4 \times 4$ , побывав на каждом из них по одному разу.*

Доску удобно представить в виде четырех горизонтальных слоев, лежащих один на другом. На рисунке 2 изображены поверхности этих слоев, а сами слои занумерованы. Для нахождения искомого маршрута достаточно указать такую нумерацию, при которой кубики с соседними номерами отстоят друг от друга на один ход коня. Такая нумерация возможна, она приведена на рисунке 2.

**Упражнение 3.** Найдите маршрут коня на поверхности объемной доски  $8 \times 8 \times 8$ . Здесь конь фактически перемещается по шести плоским доскам. Основная трудность задачи состоит в сопряжении шести обычных маршрутов, для решения удобно воспользоваться разверткой куба.

### Цилиндрические шахматы

Из обычной доски можно сделать, вообще говоря, две цилиндрические (см. также «Квант», 1970, № 5; 1971, № 8). Вертикальная цилиндрическая доска получается приклеиванием вертикали «а» к «h», а горизонтальная — приклеиванием первой горизонтали к восьмой.

10	7	22	17
21	18	9	6
8	11	20	23
19	24	5	12

4

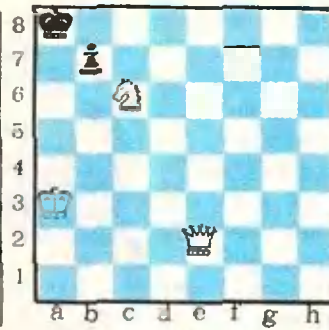


Рис. 3. Мат в 1 ход.

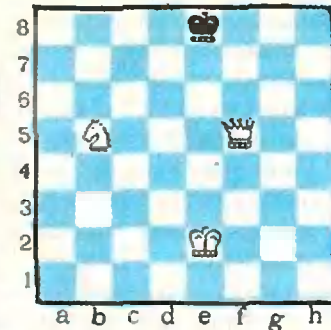


Рис. 4. Мат в 4 хода.

При переходе к цилиндрической доске не удастся решить некоторые задачи, имеющие решение на обычной доске. Например, известная задача о расстановке восьми ферзей, которой занимался Гаусс, имеет 92 решения на обыкновенной доске и ни одного на цилиндрической!

Упражнение 4. Доказать, что на цилиндрической доске нельзя расставить восемь ферзей так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу.

На рисунке 3 изображена начальная позиция сразу трех задач: и на обычной, и на двух цилиндрических досках имеется свое решение:

- а) на обычной доске 1.  $\text{Фe2—e8}$  мат;  
 б) на вертикальном цилиндре 1.  $\text{Фe8—h7!}$ , а к цели ведет 1.  $\text{Фe2—g8}$  мат (белый ферзь прошел по маршруту  $\text{e2—a6—h7—g8}$ );  
 в) на горизонтальном цилиндре 1.  $\text{Фe8+}$  также ничего не дает из-за 1...  $\text{Кра8—a1!}$ , а решает 1.  $\text{Фe2—a2}$  мат!

### Торондальные шахматы

Торондальная доска получается в результате двойного приклеивания противоположных краев обычной доски.

Решим задачу, приведенную на рисунке 4. После 1.  $\text{Фf5—h7!}$  в порядке черных два ответа:

- а) 1...  $\text{Кре8—f8}$  (поля d1, e1 и f1 контролирует белый король с e2 — на торе действуют правила горизон-

тального цилиндра!) 2.  $\text{Фh7—g6}$   $\text{Кpf8—e7}$  3.  $\text{Кре2—e1}$   $\text{Кре7—d7}$  (теперь белый король с e1 держит поля d8 и f8) 4.  $\text{Фg6—e8}$  мат!

б) 1...  $\text{Кре8—d8}$  2.  $\text{Фh7—c7+}$   $\text{Кpd3—e8}$  3.  $\text{Кb5—h6!}$  (конь идет по тору, как по вертикальному цилиндру!) 3...  $\text{Кре8—f8}$  4.  $\text{Фc7—e1}$  мат! (поля f7 и g8 держит белый конь, а остальные — ферзь).

### Шахматы на необычных досках

Перечень шахматных игр на различных досках, получающихся из обычной при помощи геометрических преобразований, можно продолжить. Существуют многомерные доски, доска для игры двое на двое (на этой доске играют в так называемые «четверные шахматы») и «на троих» (здесь победителем становится тот, кто съедает обоих королей противников).

Можно играть на двух параллельных досках — на каждой из них правила обычные и, кроме того, фигурам разрешается перемещаться с одной доски на другую как в лифте. Если при склеивании доску перевернуть на пол-оборота, то вместо цилиндрической доски мы получим лист Мебиуса! На нем фигура за один ход может очутиться на том же поле, но только с другой стороны!

Забавная доска изображена на рисунке 5, она экспонировалась на выставке французских авангардистов!

## Сказки

В шахматной композиции задачи и игры с необычными правилами, на нестандартных досках и с необычными фигурами относят к жанру сказочных (или фантастических) шахмат. Мы уже рассказали о нескольких сказочных играх на необычных досках. Остановимся теперь на некоторых сказочных фигурах, имеющих наибольшую популярность.

Ряд сказочных персонажей получается при комбинировании обычных ходов ладьи, слона и коня. Возможны четыре комбинации: ладья + слон, (в этом случае получается ферзь), ладья + конь (*канцлер*), слон + конь (*кентавр*), ладья + слон + конь (*магараджа* или *амазонка*).

Магараджа — очень мощная фигура, значительно превосходящая по силе ферзя (попробуйте найти силу магараджи методом, описанном в «Кванте», 1974, № 6). С магараджей связана следующая популярная игра.

*У одного игрока полный комплект фигур, стоящих на первоначальных местах, а у другого лишь одна магараджа, которую он ставит на произвольное поле. Магараджа проигрывает, если ее удастся съесть, и выигрывает, если дает мат неприятельскому королю.*

В этой игре пешкам запрещено превращаться, так как в противном случае выигрыш слишком прост — достаточно провести обе крайние пешки в ферзей, после чего три ферзя и две ладьи без труда окружают магараджу. При сделанной оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок может и проиграть. И все же у играющего полным комплектом фигур имеется форсированный выигрыш. М. Гарднер в книге «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974) предлагает план окружения магараджи, состоящий из 25 ходов. Однако цели можно добиться, по крайней мере, десятью ходами раньше.

Не обращая внимания на перемещения магараджи, белые делают под-



Рис. 5. Шахматная доска — экспонат выставки авангардистов.

ряд следующие 14 ходов:  $a4, h4, La3, Lhh3, Kc3, Kf3, Lb3, Lg3, d4, Fd3, Fe4, Lb7, Fd5, Lg8$  (легко видеть, что пока магараджа не могла съесть ни одной белой фигуры или дать мат). Теперь у магараджи имеются лишь два безопасных поля —  $a6$  и  $f6$ . В первом случае она гибнет после  $15.Cg5$ , а во втором — после  $15.e4$ . Может быть, вы сумеете улучшить этот рекорд?

**У п р а ж н е н и е 5.** Расставить 10 магарадж на доске  $10 \times 10$  так, чтобы они не били друг друга (на досках меньшего размера необходимым образом их расставить невозможно).

## Сказочные кони

Различные сказочные фигуры получаются из обобщенного коня ( $a, b$ ) при выборе тех или иных значений  $a$  и  $b$ . Такой конь ходит на  $a$  полей по одному из направлений и на  $b$  полей по перпендикулярному. Для обычного коня  $a = 1, b = 2$ .

Конь  $(1,3)$  называется *верблюдом*,  $(1,4)$  — *жирафом*,  $(2,3)$  — *зеброй*. Если одно из чисел  $a, b$  равно нулю, то получается ладья, перемещающаяся на фиксированное число полей, если же  $a = b$ , то получается слон, обла-

дающий тем же свойством. Конь, совершающий за один ход несколько скачков подряд, имеет «звание» *всадника*. Интересной игре посвящена задача M268 (см. «Квант», 1974, № 6). В ней одной и той же фигурой один игрок ходит как обычным конем (с двойным ходом), а другой — как верблюдом. При этом конь оказывается хитрее верблюда!

Существует множество математических игр и задач с участием сказочных фигур, все упомянутые выше темы (маршруты, расстановки, сила фигур и другие) легко переносятся и на такие фигуры.

### Шашматы

Эту игру, представляющую собой смесь шахмат и шашек, придумал американский математик С. Голомб, известный у нас своей игрой «полимино». В шашматы играют шахматными фигурами, но только на черных полях (как в шашках). Обычный конь здесь не в состоянии сделать ни одного хода (он сразу же попадает на запрещенное белое поле), поэтому его заменяют верблюдом — конем (1,3), не меняющим цвета полей.

На рисунке 6 предложен один из замкнутых маршрутов верблюда по всем полям шашматной доски. Известно, что на шахматной доске можно расставить максимум 32 коня, не угрожающих друг другу (их можно поставить на все белые или на все

8	10	24	6	8				
7	23	5	9	25				
6		32	26	4	2			
5	11	19	1	7				
4		22	30	18	16			
3	31	27	15	3				
2		12	20	28	14			
1	21	29	13	17				
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 6. Замкнутый маршрут верблюда на шашматной доске.

черные поля). Максимальное число «мирных» верблюдов на шашматной доске равно 16, то есть они также могут занять половину всех полей. Верблюдов можно поставить на поля со всеми четными или со всеми нечетными числами на рисунке 6. Таким образом, этот рисунок дает решение сразу двух задач на шашматной доске. Более подробный рассказ о шашматах (в частности, расстановку фигур перед началом партии) можно найти во второй из упомянутых книг М. Гарднера.

В заключение расскажем еще о нескольких сказочных фигурах, которые вообще уже ни на что не похожи! *Сверчок* ходит как ферзь, но перепрыгивает через свои и чужие фигуры, останавливаясь сразу за ними. *Лев*, в отличие от сверчка, приземляется на любом свободном поле за перепрыгнутой фигурой. Существуют *нейтральные фигуры*, которыми могут играть и белые и черные. *Бьющим фигурам* разрешается делать ход только со взятием. Бьющий конь называется *гиппопотамом*, а бьющий ферзь — *динозавром*. Фигура *дипломат* сама не ходит, но и ее нельзя брать; мало того, около дипломата собственные фигуры неприкосновенны! А фигура *камикадзе* (самоубийца) убирается с доски вместе со взятой фигурой!

До сих пор речь шла исключительно о фигурах. Однако и для пешек создано много разновидностей. *Пешка-хамелеон* при взятии неприятельской фигуры превращается в такую же фигуру, но своего цвета. *Сверхпешка* ходит на любое число полей по прямой и бьет на любое число полей по диагонали. *Пешка-такси* ходит и вперед, и назад. Наконец, один раз в партии пешке можно разрешить превращение в «атомную бомбу». Эта фигура сразу же после появления ставится на любое поле доски и в радиусе  $r$  полей (число  $r$  заранее оговаривается) уничтожает все вокруг себя.



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,  
РЕШЕНИЯ

К статье «Использование неравенства Коши при решении задач»

- 30 см, 40 см.
- 2 м, 2 м.
- 1 дм × 2 дм × 3 дм.

4.  $x = (1 + \sqrt{13})/2$ . Указание. Пусть  $2x - 1 = k$ , тогда

$$y = \frac{-4}{\left(k + \frac{13}{k}\right) - 2}.$$

5.  $v = 20$  км/ч.

6.  $x = 1/4$ . Указание.

$$4y + 8 = (8x + 8) + \frac{100}{8x + 8}.$$

7.  $V = 8 \pi R^3/3$ . Указание. Пусть  $x$  — расстояние от вершины конуса до шара, тогда

$$V = \frac{\pi R^2}{3} \left[ \left(x + \frac{4R^2}{x}\right) + 4R \right].$$

К статье «Электростатическое поле»

1. Напряженность поля направлена вдоль короткой диагонали ромба в сторону от заряда  $+q_1$  и равна по модулю  $E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ .

$$2. T = \pi a \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m a}{q_0 q}}.$$

3.  $E = \frac{k\tau}{\epsilon_0 R}$ . Расчеты дают  $k = \frac{1}{2\pi}$ .

4. При  $|x| \leq \frac{a}{2}$   $E = \frac{\rho|x|}{\epsilon_0}$ , при  $|x| > \frac{a}{2}$   $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ .

$$5. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2 m}}}.$$

6.  $A = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \approx 72 \cdot 10^{-8}$  Дж.

7.  $q_1 = \frac{q}{4}$ .

$$8. r_2 = \frac{r_1}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{(v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2} r_1}.$$

$$9. q = \frac{mg(v_2/v_1 + 1)}{E} = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ К}.$$

$$10. \Phi_1 = \Phi_2.$$

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1.  $x \leq 1 - \sqrt{2}$ ,  $x \geq 1 + \sqrt{2}$ . Указание. Положить  $-x^2 + 2x + 1 = y$ .

2.  $3 + \sqrt{5}/2$ . Указание. Пусть  $SA$ ,  $SC$  — касательные,  $SBD$  — секущая,  $AB \parallel CD$ . Тогда  $\triangle SBC \sim \triangle SCD$ ,  $\triangle SBA \sim \triangle SAD$ , откуда

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CB \cdot SD^2}{SC \cdot SA \cdot AD} = \frac{SD^2}{SA^2},$$

поскольку  $SA = AC = CS$  и трапеция равнобедренная. Далее воспользоваться теоремой о касательной и секущей.

$$3. x_1 = 2k\pi + \frac{3\pi}{8}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{7\pi}{8},$$

$$x_3 = 2k\pi + \pi, \quad x_4 = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \text{ — целое}).$$

Указание. Привести уравнение к виду

$$(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

и учесть условие  $\sin x - \cos x \geq 0$ .

$$4. a = -\frac{4}{9}, \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{4}{3},$$

$$z_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3}, \quad y_2 = -\frac{4}{3}, \quad z_2 = -\frac{4}{3}.$$

5.  $a/4$ . Указание. Пусть  $LN$  — линия пересечения проведенной плоскости с плоскостью  $SAB$ ,  $AD \parallel LN$  ( $N, D$  на  $SB$ ), тогда  $ND$  — искомое расстояние. Длины всех отрезков легко находятся по теореме Пифагора (поскольку  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ ).

Вариант 2

$$1. -2 - \sqrt{2} \leq x \leq -2 + \sqrt{2}.$$

$$2. h = a \sqrt{\frac{b}{a+b}}. \text{ Указание. Пусть}$$

$CD = h$ . Используя подобие треугольников  $BCD$  и  $CDM$ , легко найти  $MD$ . Затем найти площадь трапеции двумя способами: по данным основаниям и высоте и как  $S_{CDM} + S_{ABCM}$ ; получится уравнение, из которого находится  $h$ .

3.  $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ ,  $x = n\pi - (-1)^n \arcsin \frac{3}{4}$  ( $k, n$  — целые).

4.  $-6 - \sqrt{33} \leq m \leq -1/3$ .

5.  $a^2 \sqrt{3}/8$ . Указание. Сечение получается так: из точки  $M$  (середины  $AB$ ) опускаем перпендикуляр  $MK$  на  $BC$ , из  $K$  перпендикуляр  $KN$  на  $SC$ ; аналогично,  $ML \perp SA$ ,  $LN \perp SC$ , при этом  $\sphericalangle MKN = \sphericalangle MLN = 90^\circ$  ( $MK \perp$  пл.  $SBC$ ,  $ML \perp$  пл.  $SAC$ ).

Вариант 3

1.  $2 - \sqrt{3} < x < 5/4$ ,  $x \geq 2 + \sqrt{3}$ .

2.  $8R^2 \sqrt{3}/3$ .

3.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k$  — целое).

4. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a(x + y + z) = x(y + z), \\ b(x + y + z) = y(x + z), \\ c(x + y + z) = z(x + y). \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе и сравнивая с третьим, получаем

$$c(x - y) = (a - b)(x + y),$$

откуда

$$y = x \frac{c + b - a}{a + c - b}.$$

Аналогично,

$$z = x \frac{b - a + c}{a - c + b}.$$

Подставляя найденные выражения в первое уравнение системы и решая его, находим  $x$ :

$$x = \frac{2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2}{2(b + c - a)}.$$

Аналогично находим  $y$  и  $z$ . Анализ значений  $a, b$  и  $c$ , при которых система имеет решения, проведите самостоятельно.

5. 25:47.

Вариант 4

1.  $1 - \sqrt{8} \leq x < -1$ ,  $1 + \sqrt{8} \leq x$ .

2. Радиус меньшей окружности  $r_1 = a/\sqrt{3}$ ,  $r_2 = 2a/\sqrt{3}$ ,  $r_{3,4} = \frac{\sqrt{35+3\sqrt{3}}}{4} a$ .

Указание. Восставить перпендикуляры  $AN, CN$  в точках  $A$  и  $C$  к прямым  $AB, CB$  и рассмотреть  $\triangle ACN$ , применив теорему косинусов. Рассмотреть все варианты рас-

положения окружностей.

3.  $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k$  — целое).

4.  $x = y = (a^2 - 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1)/4$  при  $a - b \geq 1$ . При других  $a, b$  решений нет.

5. 97:191.

Физика

Вариант 1

1. Волна, идущая от динамика, интерферируя с волной, отраженной от поршня, образует систему стоячих волн, если выполнено условие:

$$l = \frac{\lambda}{4} (2n - 1),$$

где  $l$  — расстояние между поршнем и динамиком,  $\lambda$  — длина звуковой волны,  $n$  — целое число. На динамике — пучность — максимум амплитуды, на поршне — узел — минимум амплитуды колебаний. Пусть при этом микрофон регистрирует звук. Если сдвинуть поршень, стоячие волны пропадут. Снова они возникнут, когда поршень будет отодвинут на расстояние  $l_1 = \frac{\lambda}{4} [2(n \pm 1) - 1]$ , то

есть на расстояние  $\Delta l = \lambda/2$  от прежнего положения (рис. 1). При расстройке из-за произвольности разности фаз суммируемых сигналов звука не слышно.

По величине  $\Delta l = \lambda/2$  находится длина волны. Зная частоту  $\nu$  и длину волны  $\lambda$ , можно определить скорость звука  $u = \lambda\nu$ .

2. Так как проскальзывания нет, скорости поступательного и вращательного движений равны  $v$ . В итоге

$$Q = m \frac{v^2}{2} + m \frac{v^2}{2} = mv^2.$$

3. Рассмотрим силы, действующие на левый полуцилиндр, и их моменты относительно линии его соприкосновения с опорой (рис. 2). Так как нить невесома и нет трения, натяжение нити во всех точках по ве-

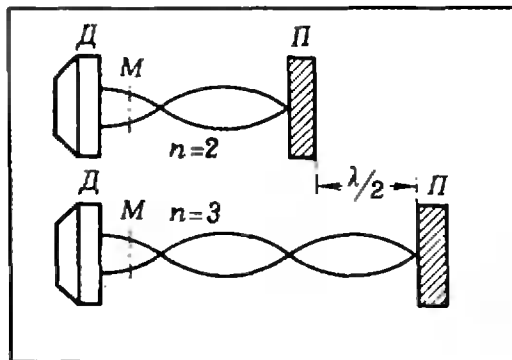


Рис. 1.

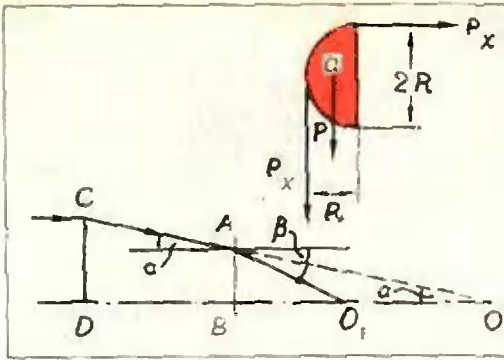


Рис. 2. Рис. 3.

личине одно и то же и равно весу неизвестного груза  $P_x$ . Уравнение моментов:  $P_x R + Pa = P_x 2R$ . Отсюда

$$P_x = Pa/R.$$

4. Раз линза полая, а вокруг вода, значит, линза собирающая. Параллельный пучок, падающий на нее, должен был бы собраться в фокусе  $O$  (рис. 3), но, преломляясь на границе раздела  $AB$ , он попадает в точку  $O_1$ . Угол падения  $\alpha$ , угол преломления  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= 1/n; \quad \operatorname{tg} \alpha = AB/BO; \\ \operatorname{tg} \beta &= AB/BO_1; \quad BO_1/BO = \\ &= \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta \approx \sin \alpha / \sin \beta = 1/n; \\ BO_1 &= (F-l)/n. \end{aligned}$$

Искомое расстояние

$$DO_1 = l + BO_1 = F/n + l(1 - 1/n).$$

5. Так как пар насыщенный и есть жидкая фаза, то при сжатии его давление постоянно. Работа по сжатию равна

$$A = F \Delta l = p \Delta V = p \Delta V = p(V_{\text{кон}} - V_{\text{нач}}).$$

К пару можно применить уравнение газового состояния:

$$pV_{\text{нач}} = (m_{\text{нач}}/\mu)RT; \quad pV_{\text{кон}} = (m_{\text{кон}}/\mu)RT;$$

это дает  $A = p(V_{\text{кон}} - V_{\text{нач}}) = (m_{\text{кон}} - m_{\text{нач}})RT/\mu$ . Отсюда

$$\Delta m = m_{\text{нач}} - m_{\text{кон}} = A\mu/RT.$$

6. Ток прекратится, когда потенциал сетки  $G_1$  из-за осевших на нее электронов

станет равным потенциалу катода, то есть нулевым. Так как тока нет, всю систему электродов можно рассматривать как систему плоских конденсаторов. В частности, анод, две поверхности сетки  $G_1$  и сетка  $G_2$  образуют два конденсатора (рис. 4). Искомый заряд  $Q_x$  равен сумме зарядов этих конденсаторов:  $Q_x = q_1 + q_2$ , где  $q_1 = -u_1 C_1$ ;  $q_2 = -u_2 C_2$ . Следовательно,

$$Q_x = -\frac{S}{4\pi} \left( \frac{u_1}{l-b} + \frac{u_2}{b-a} \right).$$

Вариант 2

$$2. \quad x = l \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

3. Соединив точки с равными потенциалами, получаем эквивалентную схему (рис. 5). По этой схеме находим искомое сопротивление:

$$R_x = 7R/12.$$

4. Простейший подход к решению задачи — пустить луч вдоль поверхности конуса и узнать, как он пойдет, пройдя луну. Построение хода луча после луны показано на рис. 6. Изображенное острия конуса будет минимым. Пусть оно находится на расстоянии  $b$  от луны. Тогда  $1/F = 1/a - 1/b$ ;  $b \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \alpha$ . Отсюда искомый угол

$$2\beta = 2 \operatorname{arctg} [(1 - a/F) \operatorname{tg} \alpha].$$

5. Введем искомое смещение  $x$ , высоту сосуда  $H_1$ , конечный уровень ртути  $H_2$ , начальное давление воздуха  $p_1$ , конечное  $p_2$ ,  $d$  — удельный вес ртути. Условие сохранения объема ртути:  $H_1 l = H_2 (l + x)$ . Из условия равновесия вначале  $p_1 H_1 =$

$$= p_c p_1 H_1 = d \frac{H_1}{2} H_1 = \frac{d}{2} H_1^2 \quad \text{и в конце}$$

$$p_2 H_1 = p_c p_2 H_2 = \frac{d H_2}{2} H_2 = \frac{d}{2} H_2^2 \quad \text{имеем}$$

$$p_1/p_2 = (H_1/H_2)^2. \quad \text{Используя уравнение га-}$$

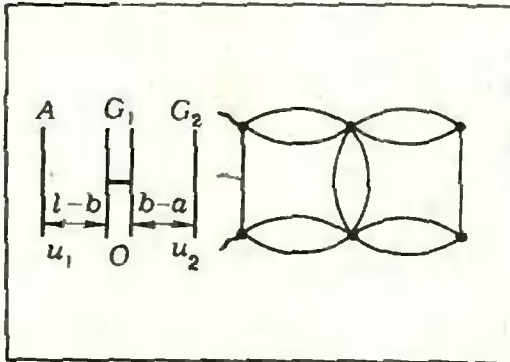


Рис. 4.

Рис. 5.

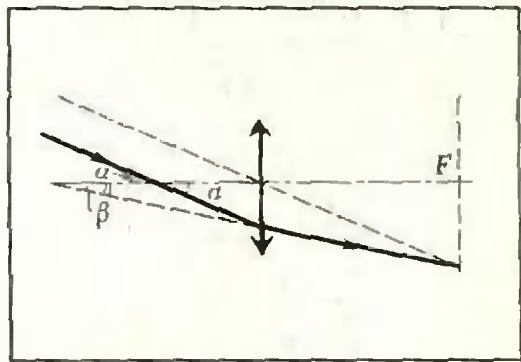


Рис. 6.



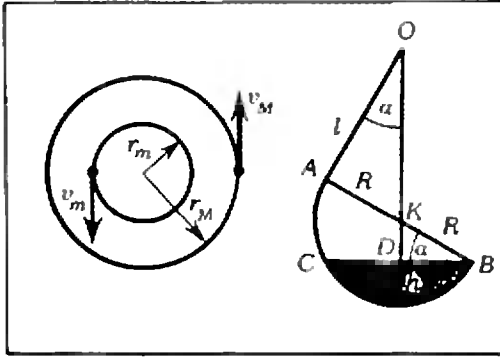


Рис. 7.

зowego состояния, получаем

$$\frac{p_1}{r_2} = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1} = \frac{T_1(l-x)}{T_2 l} = \frac{3(l-x)}{l} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 = \left(\frac{l+x}{l}\right)^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{\sqrt{33} - 5}{2} l.$$

6. Введем расстояние между частицам  $r$  и величину заряда  $q$ . Частицы будут двигаться вокруг общего центра масс (см. рис. 7) по окружностям с радиусами  $r_m = rM/(M+m)$  и  $r_M = rm/(M+m)$  со скоростями  $v_m$  и  $v_M$  такими, что

$$mv_m = Mv_M. \quad (1)$$

На основании II закона Ньютона

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{mv_m^2}{r_m} = \frac{m(M+m)v_m^2}{Mr},$$

отсюда

$$\frac{q^2}{r} = \frac{m(M+m)v_m^2}{M}. \quad (2)$$

Пусть скорость частицы увеличили в  $n$  раз. Тогда на основании закона сохранения импульса обе частицы будут продолжать двигаться даже при наименьшем  $n$  с некоторой скоростью  $u$  после удаления частиц на очень большое расстояние (их относительная скорость в этом случае равна нулю). Закон сохранения импульса даст уравнение

$$m(n-1)v_m = (M+m)u. \quad (3)$$

По закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{r} + \frac{mn^2v_m^2}{2} + \frac{Mv_M^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2}.$$

Подставляя сюда  $v_M$  из (1),  $r$  из (2) и  $u$  из (3), получаем квадратное уравнение для  $n$ :  $n^2 + 2n \frac{m}{M} - \left[\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2 + 4 \frac{m}{M}\right] = 0$ ,

откуда  $n = \left(\frac{m}{M}\right) \left[ \pm \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{2} - 1 \right]$ .

Оба корня имеют смысл, так как новая скорость частицы  $m$  может быть направлена как по скорости  $v_m$  (тогда знак +), так и против скорости (знак -).

Вариант 3

1. Если на динамик подается напряжение  $u_x = u_D \cos \omega t$ , то с микрофона снимается запаздывающее по фазе напряжение  $u_y = u_M \cos(\omega t + \varphi) \equiv u_M \cos \omega(t + t_0)$ , где сдвиг по фазе обусловлен временем  $t_0$  прохождения звуком расстояния  $l$  от динамика до микрофона. Световое пятно на экране, таким образом, участвует в двух взаимноперпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой, но с разными амплитудами и сдвигом по фазе. В общем случае на экране виден эллипс. Если сдвиг по фазе  $\varphi = \pi k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то эллипс вырождается в отрезок с углом наклона к горизонтальной оси

$$\alpha_{\pm} = \arctg \frac{y}{x} = \pm \arctg \frac{u_M}{u_D}.$$

Сдвиг по фазе  $\varphi = \omega t_0 = \omega \frac{l}{c}$ , где  $c$  — скорость звука. В случае вырождения эллипса в отрезок по величинам  $l_k$ ,  $\omega$ , используя связь  $\pi k = \omega \frac{l}{c}$ , можно определить скорость звука:

$$2\pi = \omega \frac{|l_k - l_{k\pm 1}|}{c};$$

$$c = \frac{|l_k - l_{k\pm 1}| \omega}{2\pi} = \frac{|l_k - l_{k\pm 1}|}{T}.$$

2.  $x = h \sqrt{n^2 - 1}$ .

3. Учитывая, что напряженность поля, создаваемого одной пластиной, равна  $2\pi Q/S$ , имеем

$$\frac{x_0}{x} = 1 + 2\pi Q^2 / \rho_a S^2.$$

4. По закону сохранения энергии

$$\frac{Qq}{r_0} = \frac{Qq}{r} + mgk(r - r_0).$$

Отсюда

$$r = \frac{Qq}{mgkr_0},$$

второй корень  $r_0$  не годится.

5. Ручка половника и оставшаяся жидкость должны расположиться в итоге так (рис. 8), чтобы вертикаль  $OD$ , проведенная через точку подвеса  $O$ , прошла через центр тяжести оставшейся жидкости и была бы

перпендикулярна к ее поверхности ( $OD \perp BC$ ,  $CD = DB$ ). Объем области, занятой жидкостью:  $V = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$ . Так как  $BA \perp AO$ .

$OD \perp CB$ ,  $CD = DB$ , то  $AK = KB = R$ .  $\angle AOD = \angle ABC = \alpha$ ;  $\sin \alpha = R / \sqrt{R^2 + l^2}$ ;  $h = R - R \sin \alpha = R \left( 1 - R / \sqrt{R^2 + l^2} \right)$ . Отсюда

$$V = \frac{\pi R^3}{3} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right)^2 \left( 2 + \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right).$$

6. Если цилиндр движется со скоростью  $v$ , то из-за несжимаемости жидкости она должна проходить в противоположную сторону между цилиндром и стенками со скоростью  $u$  так, что  $S_1 v = S_2 u$ , то есть  $\pi r^2 v = \pi (R^2 - r^2) u$ ; отсюда  $u = r^2 v / (R^2 - r^2)$ . Из закона сохранения энергии  $\rho \pi r^2 l v^2 / 2 + \rho_0 \pi (R^2 - r^2) l u^2 / 2 = (\rho - \rho_0) \pi r^2 l g h$ . Та-

ким образом,  $v = \sqrt{\frac{2gh(\rho/\rho_0 - 1)}{\rho/\rho_0 + r^2/(R^2 - r^2)}}$ ,  $a = \frac{v^2}{2h} g \left( \frac{\rho/\rho_0 - 1}{\rho/\rho_0 + r^2/(R^2 - r^2)} \right)$ .

**К задачам «Квант» для младших школьников»**

(см. «Квант», 1975, № 3)

1. Используйте признак делимости на 3.

2. Видимые нами размеры предмета зависят не только от его величины, но и от расстояния, на котором он от нас находится. (Спичечной головкой можно «заслонить» Луну.) Все видимые из окна вагона предметы перемещаются на одно и то же расстояние за единицу времени. Но один и тот же отрезок кажется нам тем меньше, чем дальше он от нас находится.

3. 18 секунд.

4. Когда температура воды (и коробочки) достигает  $100^\circ\text{C}$ , вода закипает (при  $100^\circ\text{C}$  бумага не горит). В дальнейшем температура воды (и коробочки) не повышается, так как тепло идет на поддержание кипения воды.

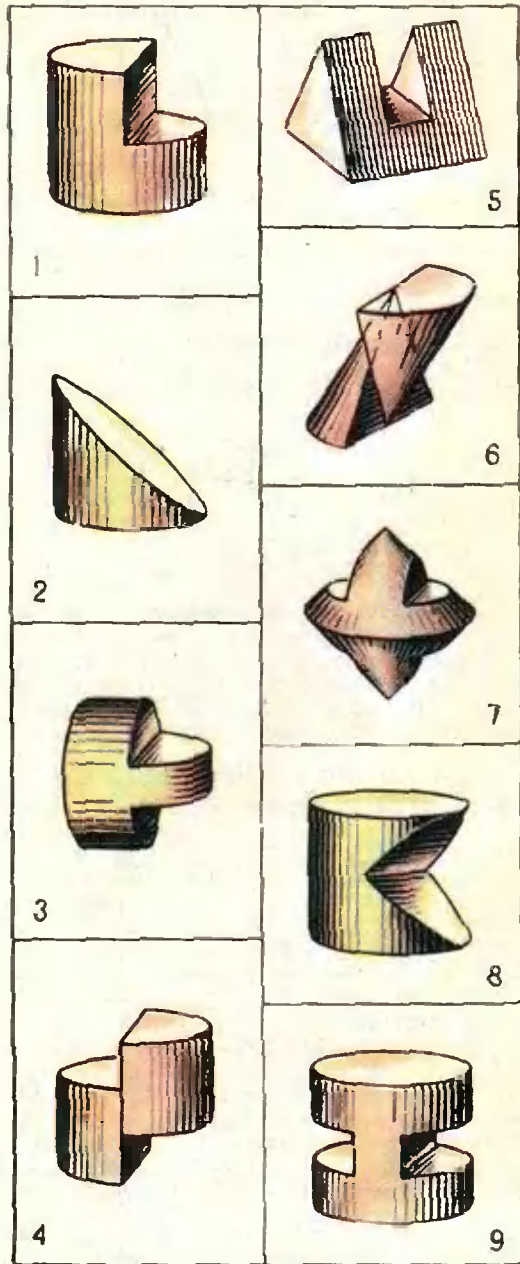
5. Достаточно даже одной гири в 200 г. При первом взвешивании кладем на чашку весов гирию в 200 г и высыпем всю крупу на чашки весов так, чтобы весы были уравновешены. Тогда на одной чашке будет 4 кг 400 г, на другой — 4 кг 600 г крупы. При втором взвешивании аналогично рассыпем 4 кг 600 г, получаем 2 кг 400 г и 2 кг 200 г. При третьем взвешивании от 2 кг 200 г отвешиваем 200 г.

Корректор Л. С. Сомова

117071. Москва, В-71, Ленинский проспект, 13. «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/II-75. Подписано в печать 5/III-75. Бумага 70x100 1/16. Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 5,94 Т-03286. Цена 30 коп. Заказ 33. Тираж 367 850 экз.

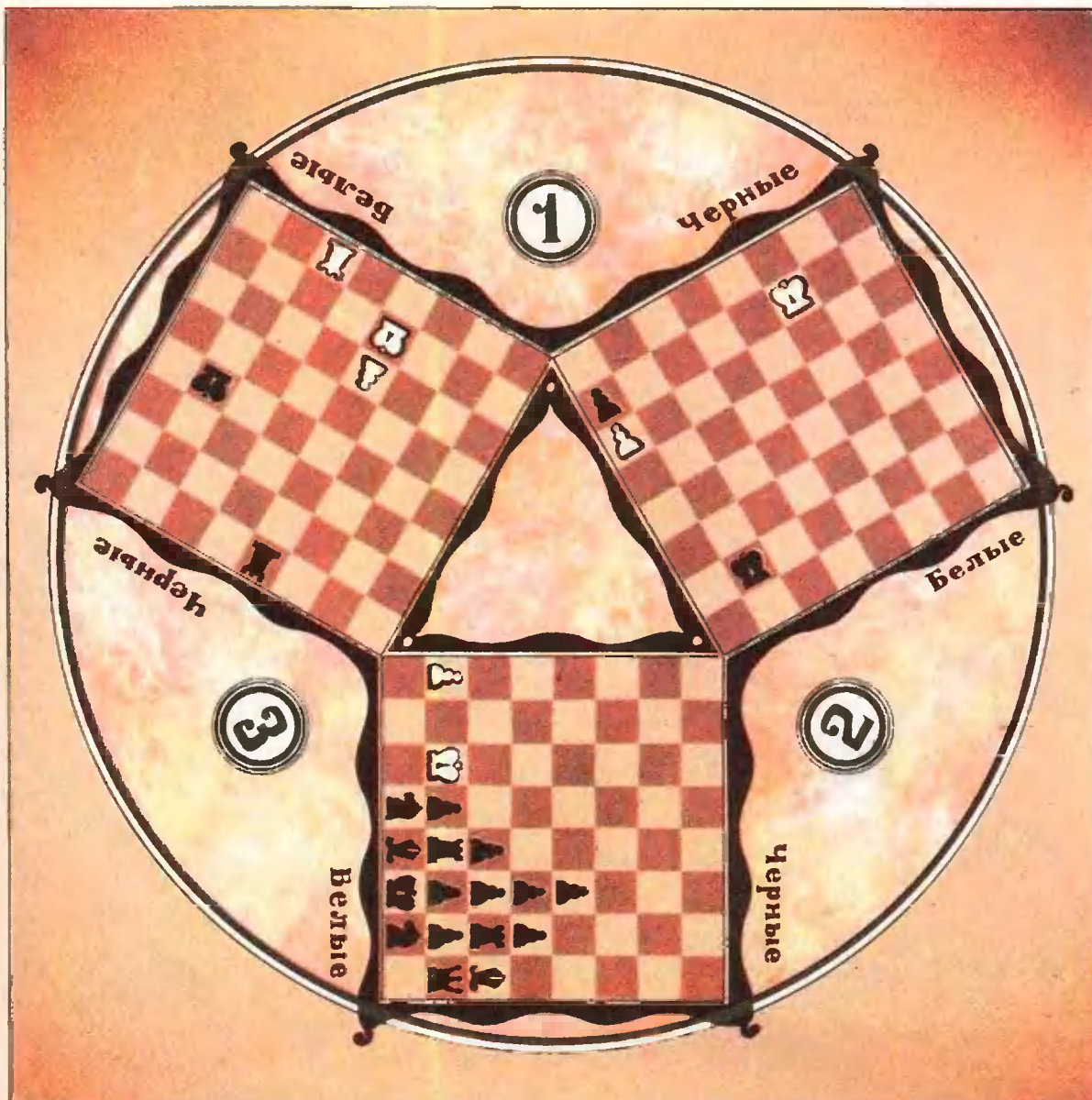
**К задаче «Универсальные пробки»**

(см. «Квант», 1975, № 2, 4-я с. обл.)



Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров  
СССР по делам издательства, полиграфии и книж-  
ной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



### Турнир трех математиков

Трое юных математиков решили провести между собой шахматный турнир. Однако их несколько огорчало то обстоятельство, что всякий раз, когда двое играют, третий вынужден наблюдать за сражением вместо того, чтобы сесть за доску самому.

Тогда математики проявили всю свою изобретательность и придумали такое хитрое расположение досок, при котором «простоев» нет и все три партии играют одновременно.

В тот момент, когда мы подошли к столику, возникли очень интересные позиции, изображенные на диаграммах. Везде был ход белых. Постарайтесь выяснить, чем закончился турнир, если шахматисты действовали в этих позициях наилучшим образом. Запомните, что результаты турнира в какой-то мере соответствовали тому, насколько хорошо наши игроки были знакомы с геометрией шахматной доски.

Цена 30 коп.  
Индекс 70465

